МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А.

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АЙРЫМ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А.

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

A.B. Baizakov, G.A. Dzheenbaeva

ON SOLVABILITY OF THE INITIAL PROBLEM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THIRD ORDER

УДК:517.946

Өзгөртүп түзүү методу менен үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеменин Коши маселесинин чыгарымдуулугу жана анын структурасы окуп үйрөнүлдү.

Негизги сөздөр: *Коши маселесинин чыгарымдуулугу, айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме, кысып чагылтуу принциби, экинчи роддогу Вольтерра интегралдык теңдемелер.*

Изучается разрешимость решений задачи Коши и ее структура для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка методом преобразования решений.

Ключевые слова: *разрешимость задачи Коши, интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, принцип сжатых отображений, интегральные уравнения Вольтерра второго рода.*

We study solvability of the Cauchy problem solutions and its structure for nonlinear partial integrodifferential equations of third order by the conversion solutions method.

Key words: *the solvability of the Cauchy problem, integro-differential equations in partial derivatives, the contraction mapping principle, Volterra integral equation of the second kind.*

Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, дающие возможность математического представления процессов с последействием, протекающих в пространстве и во времени играют важную роль в математике и ее приложениях. До сих пор остается малоисследованной областью проблема выяснения разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В [2-3] найдены условия разрешимости и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. В этих работах предлагается аналитический метод построения решений классической задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. Сутью предложенного метода является преобразование решений исходной задачи Коши в эквивалентное ей интегральное уравнение Вольтерра, к которой применим принцип сжатых отображений. Целью настоящей работы является применение вышеуказанного аналитического метода к исследованию разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

$$u_{ttx} + \alpha u_{tx} + \beta u_{tt} + \alpha\beta u_t + (\alpha+1)u_x + \beta(\alpha+1)u = f(t,x,u(t,x)) + \int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u_t(0,x) = \psi(x), \quad (3)$$

где α, β - некоторые положительные постоянные, $f(t,x,u)$, $K(t,x,s,u)$ - известные непрерывные функции; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными входящими в (1).

Решение задачи Коши (1)-(3) ищем в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \tag{4}$$

где $c(t,x)$ - известная непрерывная функция, причем

$$c(o,x)=\varphi(x),$$
$$c_t(o,x)=\psi(x),$$

$Q(t,x)$ - новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

Для определения функции $Q(t,x)$ необходимо подставлять (4) в (1). С этой целью из (4) последовательно находим нижеследующие соотношения

$$u_t(t,x)=c_t-\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\cos(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds$$

Учитывая (4) отсюда имеем

$$u_t=c_t-\alpha\left(u-c\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\cos(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds. \tag{5}$$

$$u_{tt}+\alpha u_t=c_{tt}(t,x)+\alpha c_t+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}Q\left(t,\rho\right)d\rho-\alpha\left(u-c\right)-$$
$$-\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds=$$
$$=c_{tt}+\alpha c_t+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}Q(t,\rho)d\rho-(\alpha+1)\left(u-s\right). \tag{6}$$

Отсюда дифференцируя обе части получим

$$u_{ttx}+\alpha u_{tx}=c_{ttx}+\alpha c_{tx}+Q(t,x)-$$
$$-\beta\left[u_{tt}+\alpha u_t+(\alpha+1)(u-c)-c_{tt}-\alpha c_t\right]-(\alpha+1)\left(u_x-c_x\right). \tag{7}$$

Отсюда имеем

$$u_{ttx}+\alpha u_{tx}+\beta u_{tt}+\alpha\beta u_t+\left(\alpha+1\right)u_x+\beta\left(\alpha+1\right)u=$$
$$=c_{ttx}+\alpha c_{tx}+\beta c_{tt}+\alpha\beta c_t+\left(\alpha+1\right)c_x+\beta\left(\alpha+1\right)c+Q(t,x). \tag{8}$$

Заменяя левую часть уравнения (1) соотношением (8) имеем

$$Q(t,x)=f\left(t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds\right)+$$
$$+\int_0^t K(t,s,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds)ds+H(t,c)=AQ, \tag{9}$$

где

$$H(t,c)\equiv c_{ttx}+\alpha c_{tx}+\beta c_{tt}+\alpha\beta c_t+\left(\alpha+1\right)c_x+\beta\left(\alpha+1\right)c. \tag{10}$$

Нелинейное интегральное уравнение (9) будем решать методом принципа сжатых отображений [1].

Предположим:

1) При всех $\{t\ge 0,\ -\infty<x<\infty\}$ функция $H(t,c)$ непрерывна и ограничена.

$\left\|H(t,c)\right\|\le M_0=const$;

2) В области $R=\{0\le t<\infty,\ -\infty<x<u<\infty\}$ функция $f(t,x,u),K(t,s,x,u)$ непрерывна и ограничена

$$\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const; \qquad \|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const \tag{11}$$

Кроме того в этой области функция $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ удовлетворяют условиям Липшица по третьему аргументу u:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2 - u_1\|, \qquad \|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \le N\|u_2 - u_1\| \tag{12}$$

где L, L_1 - некоторые положительные постоянные.

Правую часть (9) рассмотрим как оператор $A[Q]$ действующий на функцию $Q(t,x)$.

Имеем $\|A[Q]\| \le \|f(t,x,u) + H(t,c)\| + \|K(t,s,x,u)\|T \le M$, где $M = M_0 + M_1 = const$.

Учитывая (9), (11)-(12) оценим разность

$$\|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \le \left\| f\left(t,x,c + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q_1(t,s)\, d\rho ds\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(t,x,c + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q_2(t,s)\, d\rho ds\right)\right\| +$$

$$\left\| \int_0^t K\left(\tau,x,c + \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(\tau-s) Q_1(\tau,s)\, d\rho ds\right) - \right.$$

$$\left. - \int_0^t K\left(\tau,x,c + \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(\tau-s) Q_2(\tau,s)\, d\rho ds\right)\right\| \le$$

$$\le (L+NT)\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) \|Q_1(t,s) - Q_2(t,s)\|\, d\rho ds\right\} \le$$

$$\le (L+NT)\frac{1}{\alpha\beta}\|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \le \frac{1}{2}\|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\|,$$

где α, β - такие, что выполняется

$$\frac{L+NT}{\alpha\beta} \le \frac{1}{2}.$$

По принципу сжатых отображений, отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение (9) при всех $\{t \ge 0,\ -\infty < x < \infty\}$ имеет единственное непрерывное и ограниченное решение $Q(t,x)$.

Далее докажем ограниченность решений задачи Коши (1)-(3). Из (4) при всех $t \ge 0,\ -\infty < x < \infty$ имеем неравенство

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} |\sin(t-s)| \|Q(s,\rho)\|\, d\rho ds \le \tilde{n}_0 + \frac{M}{\alpha\beta} = M_{00} = const.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Пусть 1) при всех $t \ge 0,\ -\infty < x < \infty$ функции $c(t,x),\ c(0,x) = \varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными входящими в (1)

2) в области $R = \{0 \le t < \infty,\ -\infty < x < u < \infty\}$ функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ непрерывны и ограничены

$$\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const; \|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const$$

Кроме того, в этой области *R* функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2 - u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \le N\|u_2 - u_1\|,$$

$$\frac{L+NT}{\alpha\beta} \le \frac{1}{2}.$$

Тогда при всех $t \ge 0,\ -\infty < x < \infty$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1) с начальными данными (2)-(3) имеет ограниченное решение.

Литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций функционального анализа. - М.: Наука, 1972. - С. 496.
2. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. К теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2008. - Вып. 37. - С. 3-7.
3. Иманалиев М.И., Иманалиев Т.М., Какишев К. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2007. - Вып. 36. - С. 19-28.
4. Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А. О разрешимости начальной задачи сингулярно-возмущенной интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: инновации в науке и образовании» (Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова). - Актюбинск, февраль, 2015.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандарова С.