*Исаев А.Д., Осмонканов Н.А.*

# ТУУРАСЫНАН ТҮЗ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИЙИЛҮҮ, ЫКТЫМАЛДУУЛУК ИНТЕГРАЛЫ ЖАНА РИККАТИ ТЕҢДЕМЕСИ

*Исаев А.Д., Осмонканов Н.А.*

# НЕЛИНЕЙНЫЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ, ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ И УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

*A.D. Isaev, N.A. Osmonkanov*

# NONLINEAR LATERAL BENDING, THE PROBABILITY INTEGRAL AND RICCATI EQUATION

***Теоретические расчёты нелинейного поперечного изгиба, ведущие к численно- аналитическим решениям интеграла вероятности и уравнения Риккати.***

*УДК: 517.582+517.923*

*Макалада түз сызыктуу эмес ийилүү маселесинин тереңдетилген чыгарылуусу аркылуу ыктымалдуулук интегралынын жана Риккати теңдемесинин сандык-аналитикалык чыгарылышы каралат.*

***Негизги сөздөр:*** *серпилгичтүү сызык, шарнирдик тирек, кысуу, ыктымалдуулук интегралы, Риккати теңдемеси.*

*В статье рассматривается углубленная задача определения упругой линии при поперечном изгибе, приводящее к численно-аналитическим решениям интеграла вероятности и уравнения Риккати.*

***Ключевые слова:*** *упругая линия, шарнирная опора, жёсткое защемление, жёсткость на изгиб, интеграл вероятности, уравнение Риккати.*

*The article discusses the problem of determining the depth of the elastic line of the transverse bending, leading to numerical and analytical solutions of integral equations and probability Riccati.*

***Key words:*** *Elastic line rocker bearing, rigid pinched, stiffness in bending, the probability integral, Riccati equation.*

**I. Введение.** Решение интеграла вероятности, уравнения Риккати хотя и существует, но имеет весьма громоздкий вид. В этой работе предлагается при помощи функций вида $e^{w(\theta)}$, $\tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}$ $w(\theta) \to w[\theta(z)]$, *– сложная функция* численно-аналитическое решение вышеупомянутых задач. В этой работе сначала рассматривается задача на нелинейный изгиб со сравнением экспериментальных данных и сходимости полученных функций на графиках построенных с помощью Mathcad 11 [3], затем полученные численно-аналитические выкладки применяются в решении интеграла вероятности и уравнения Риккати.

**Актуальность.** Решения интеграла вероятности и уравнения Риккати являются актуальными задачами многих нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы протекающие в технике и технологии различных отраслей, с чем соприкасается человек. Математика решения подобного рода задач очень сложна для среднестатистического математика-читателя. Поэтому есть целесообразность в решении подобных задач простым численно-аналитическим путём.

**II. Теоретическая часть.** Преобразуем нелинейное уравнение кривизны согласно [2]

$$\frac{y''(z_1)}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} = \underbrace{\frac{M_x(z_1)}{EI_x}}_{f(z)} \quad \Rightarrow \cos(\theta)\cdot d\theta = f(z)\cdot dz$$

$f(z)$ *– непрерывна и интегрируема, рассматриваемом интервале*

$$(\text{за исключением особых точек, где } \theta(z) = \frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{+\pi}{2})$$

$$\sin(\theta) = F(z) + \underbrace{C_1}_{\substack{\text{определяется} \\ \text{условиями задачи.}}}$$

Пусть

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dy}{dz} = e^{w(\theta)}\ ,\ \frac{dS}{dz} - \frac{dy}{dz} = e^{-w(\theta)} \text{ иначе } \ln\left|\frac{1}{\cos(\theta)} + tg(\theta)\right| = w(\theta)\ ,\ \ln\left|\frac{1}{\cos(\theta)} - tg(\theta)\right| = -w(\theta)$$

$$\text{так как в дифференциалах} \quad dw = d\sin(\theta) + d\Delta w,\ \text{при } -55^0 \le \theta \le 55\ ,$$

$$M(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} + \cos(\theta) = 2 \ \to d\Delta w = 0$$

Зная, что

$$\frac{dM(\theta)}{d\,\frac{1}{\cos(\theta)}} = \frac{d\Delta w}{dw} = \sin^2(\theta)\ ;\quad \frac{d\sin(\theta)}{dw} = \cos^2(\theta)\ ;\quad \frac{dS}{dz} = \frac{1}{\cos(\theta)} = ch(w)\,;\quad \frac{dy}{dz} = tg(\theta) = sh(w);$$

$$\frac{dy}{dS} = \sin(\theta) = th(w)$$

Выведем ещё одну формулу:

$$d\left[\ln\left|\frac{1}{\cos(\theta)} + tg(\theta)\right|\right] = \frac{1}{\cos(\theta)}d\theta = dw\ ,\qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}d\theta = \sin(\theta)dw = -d\ln\left|\cos(\theta)\right|$$

$$-d\ln\left|\cos(\theta)\right| = d\left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} + \frac{\sin^4(\theta)}{4} + \frac{\sin^6(\theta)}{6} + \frac{\sin^8(\theta)}{8} + .......\right]\qquad \textit{для}\ \ \theta^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$-d\ln\left|\cos(\theta)\right| = d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n}(\theta)}{2\cdot n} \tag{II.1}$$

$$dw = d\sin(\theta) + d\Delta w = d\sin(\theta) + \sin^2(\theta)\underbrace{dw}_{d\sin(\theta)+d\Delta w}$$

$$\textit{расщепляя получим}\quad dw = d\sin(\theta) + \sin^2(\theta)d\sin(\theta) + \sin^4(\theta)d\sin(\theta) + .....$$

$$dw = \sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2\cdot n}\left(\theta)\right)\cdot d\sin(\theta) = d\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n+1}\left(\theta)\right)}{2\cdot n+1}\right] \tag{II.2}$$

$$dw = d\sin(\theta) + d\Delta w = d\sin(\theta) + \sin^2(\theta)dw\ ;\quad \sin^2(\theta)dw = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}d\theta = \sin(\theta)d - \ln\left|\cos(\theta)\right|$$

$$dw = d\sin(\theta) + \sin(\theta)d - \ln\left|\cos(\theta)\right| = d\sin(\theta) + \sin(\theta)d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n}(\theta)}{2\cdot n}\quad \textit{сходится быстрее} \tag{II.3}$$

$$\textit{Более удобно}\,[3],\ \frac{d\theta}{dS} = f(z)\ \rightarrow dS = \frac{1}{f(z)}d\theta\ \ \textit{или}\ \ dS = \frac{1}{\cos(\theta)}dz = ch(w)dz\ ,$$

$$dy = \sin(\theta)\cdot ch(w)\cdot dz\,,\quad \textit{где}\ ch(w) = 1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^6}{6!} + ...... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{2\cdot n}}{2\cdot n!}\qquad \textit{для}\ w^2 < \infty$$

$$\textit{À òàêæå}\quad dS = \frac{1}{f(z)}d\theta \rightarrow \cos(\theta)\cdot dS = \frac{1}{f(z)}\cdot\frac{\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}\cdot d\theta$$

$$dz = \frac{1}{f(z)}\cdot\cos^2(\theta)\cdot dw = \frac{1}{f(z)}\cdot\cos^2(\theta)\cdot d\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n+1}\left(\theta)\right)}{2\cdot n+1}\right]\ \textit{ïðèâåä¸ò}$$

$$f(z)\cdot dz = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2\cdot n}\left(\theta\right)\right]\cdot\cos^2(\theta)\cdot f(z)\cdot dz\ \rightarrow\ \frac{1}{\underbrace{\cos^2(\theta)}_{\substack{\textit{êðîìå îñîáûõ}\\ \textit{òî÷åê}\ \theta=\frac{-\pi}{2};\frac{+\pi}{2}}}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2\cdot n}\left(\theta\right)\right]$$

ïîäîáðàâ ÷ëåíû , ìîæíî îáåñïå÷èòü ñõîäèìîñòü ôóíêöèé â òðåáóåìîì èíòåðâàëå.

$$\textit{ñíîâà} \quad \frac{1}{\cos^2(\theta)} \cdot d\sin(\theta) = dw \rightarrow dw = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2\cdot n}(\theta)\right] \cdot d\sin(\theta)$$

$$dw = d\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2\cdot n+1}(\theta))}{2\cdot n+1}\right]$$

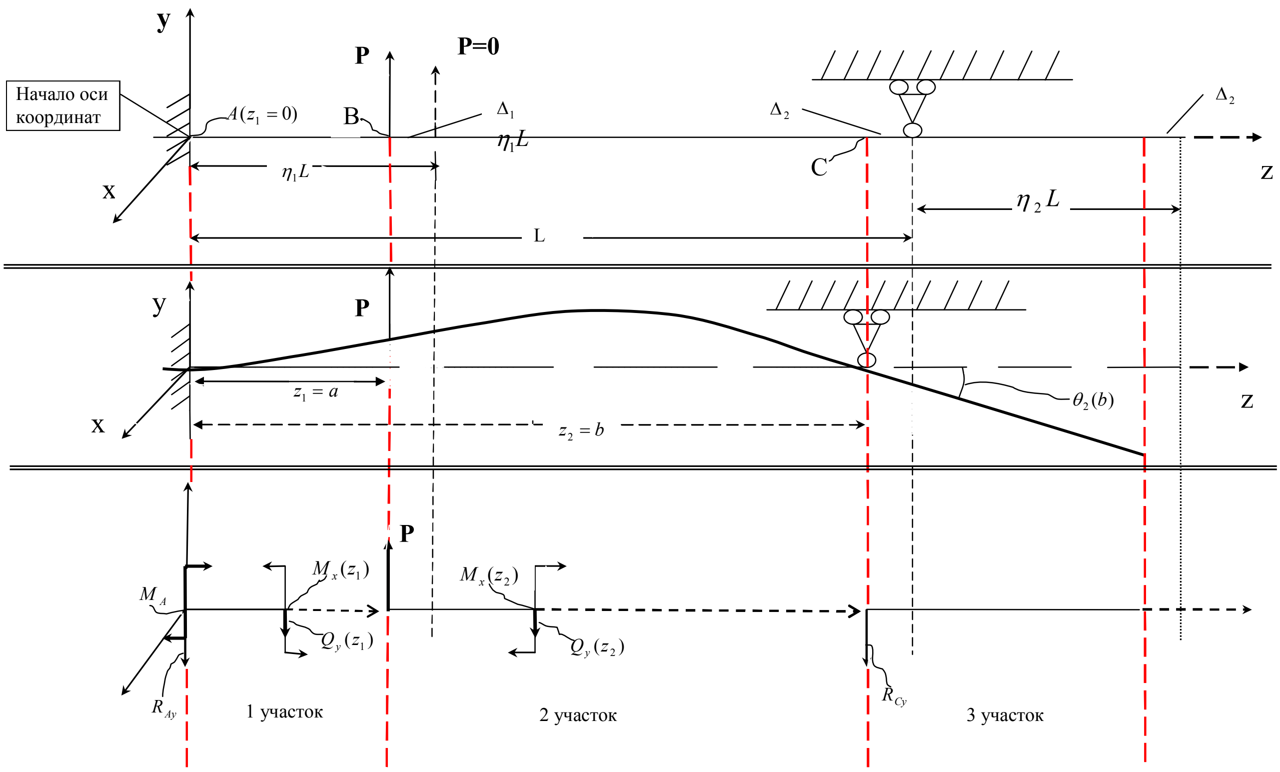
íàèáîëåå ïðàêòè÷íà ê ïðèìåíåíèþ â èíòåðâàëå èçìåíåíèÿ :

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad \textit{ãäå} \quad dw = d\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2\cdot n+1}(\theta))}{2\cdot n+1}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\underbrace{\cos(\theta)}_{1}} \cdot d\theta = d\left[\sin(\theta) + \frac{1}{3}\cdot\sin^3(\theta) + \frac{1}{5}\cdot\sin^5(\theta)\right]$$

$$d\theta = d\left[\sin(\theta) + \frac{1}{3}\cdot\sin^3(\theta) + \frac{1}{5}\cdot\sin^5(\theta)\right] \qquad [3]$$

**II.1.**Применим вышеуказанные выкладки в дифференциалах к **задаче нелинейного поперечного изгиба [3] .**




**Граничные условия для нелинейного уравнения:**

$$y_{z_1=0} = 0; \; y_{z_2=b} = 0$$

$$\sin(\theta_1)_{z_1=0} = 0; \; \sin(\theta_2)_{z_2=b} = C_2$$

$$y_{z_1=a}=y_{z_2=a}$$

$$\sin(\theta_1)_{z_1=a}=\sin(\theta_2)_{z_2=a} \quad ; \quad \left(\frac{d\theta_1}{dS_1}\right)_{z_1=a}=\left(\frac{d\theta_2}{dS_2}\right)_{z_2=a} \tag{4}$$

$$0\le z_1\le a;\ \ a\le z_2\le b$$

Составим уравнение сил и моментов сил в точках относительно назначенной системы координат.

В точке «А» $\sum P_{ix}=0$;

$$\sum P_{iz}=R_{Az}-R_{Cz}=0 \ \Rightarrow \ R_{Az}=R_{Cz}$$

$$\sum P_{iy}=-R_{Ay}+P-R_{Cy}=0$$

$$\sum m_A=M_A+a\cdot P-b\cdot R_{Cy}=0; \quad M_A=b\cdot R_{Cy}-a\cdot P$$

$R_{Cy}=P-R_{Ay}$; $\quad R_{Cz}=R_{Cy}\cdot tg(\theta_C)$ ; $\quad R_{Az}=R_{Ay}\cdot tg(\theta_A)$ ; *так как* $\theta_A=\theta_C=0$ *то* $R_{Az}=R_{Cz}=0$

**1.1 Участок** $0\le z_1\le a$ (Аналитический метод и Mathcad 11 [3])

$$\sum R_Y=Q_y(z_1)-R_{Ay}\cdot\cos(\theta_1)=0 \quad \Rightarrow \quad Q_y(z_1)=R_{Ay}\cdot\cos(\theta_1)$$

$$\sum m_x(z_1)=z_1R_{Ay}+M_A+M_x(z_1)=0 \Rightarrow M_x(z_1)=-(M_A+z_1R_{Ay})$$

$$M_x(z_1)=-\left[\left(b\cdot R_{Cy}-a\cdot P\right)+z_1\left(P-R_{Cy}\right)\right]$$

$$\frac{y''(z_1)}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}=\frac{M_x(z_1)}{EI_x}$$

$$\frac{d\theta_1}{dS_1}=-\left(\underbrace{\frac{\left(b\cdot R_{Cy}-a\cdot P\right)}{EI_x}}_{A}+z_1\cdot\underbrace{\frac{\left(P-R_{Cy}\right)}{EI_x}}_{A_1}\right) \quad ; \qquad \frac{d\theta_1}{dS_1}\cdot dz_1=\underbrace{-\left(A+A_1\cdot z_1\right)}_{t_1}\cdot dz_1$$

$$\int\cos(\theta_1)d\theta_1=\int-\left(A+A_1\cdot z_1\right)dz_1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_1)=\frac{-1}{2\cdot A_1}\cdot\left[-\left(A+A_1\cdot z_1\right)\right]^2+C_1 \tag{5}$$

$$\sin(\theta_1)^*=-A\cdot z_1-\frac{A_1}{2}\cdot z_1^2+C_1^*$$

$$\theta_1(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{A^2}{2\cdot A_1} \ ; \qquad \sin(\theta_1)=\frac{-1}{2\cdot A_1}\cdot\left[\underbrace{-\left(A+A_1\cdot z_1\right)}_{\frac{d\theta_1}{dS_1}}\right]^2+\frac{A^2}{2\cdot A_1}$$

$C_1^*=0$ ; $\quad \sin(\theta_1)^*=-A\cdot z_1-\frac{A_1}{2}\cdot z_1^2$ ; $\quad \sin(\theta_1)^*=-A\cdot z_1-\frac{A_1}{2}\cdot z_1^2+C_1^*$ *использоватся не будет.*

$y''(z_1)=0$ наличие перегиба на этом участке определяется $-\left(A + A_1 \cdot z_1^*\right) = 0 \to z_1^* = \dfrac{-A}{A_1}$ при больших нагружениях точка перегиба проявляется отчётливо и совпадает с экспериментальной точкой перегиба. $\sin\left(\theta(z_1^*)\right) = C_1 = \dfrac{A^2}{2 \cdot A_1}$

Используя формулу $d\theta = d\left[\sin(\theta) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta) + \frac{1}{5} \cdot \sin^5(\theta)\right]$ с учётом граничных условий

$\theta_1 = \sin(\theta_1) + \dfrac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_1) + \underbrace{C_{\theta_1}}_{0}$ не плохо работает в интервале

$-75^0 \le \theta_1 \le 75^0$

$dS_1 = \dfrac{1}{t_1} d\theta_1$ , $dy_1 = \dfrac{\sin(\theta_1)}{t_1} d\theta_1$ *интегралы, которых есть*

$$y(z_1) = \frac{-1}{A_1} \cdot \left[\frac{-1}{6 \cdot A_1} \cdot t_1^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{A_1} \cdot t_1 - \frac{1}{56 \cdot A_1^3} \cdot t_1^7 + \frac{3}{40} \cdot \frac{A^2}{A_1^3} \cdot t_1^5 - \frac{1}{8} \cdot \frac{A^4}{A_1^3} \cdot t_1^3 + \frac{1}{8} \cdot \frac{A^6}{A_1^3} \cdot t_1\right] + \frac{1}{A_1} \cdot \left[\frac{-1}{3 \cdot A_1} \cdot A^3 - \frac{2}{35 \cdot A_1^3} \cdot A^7\right]$$

$$S(z_1) = z_1 + \left(\frac{1}{20} \cdot A_1^2 \cdot z_1^5 + \frac{1}{4} \cdot A \cdot A_1 \cdot z_1^4 + \frac{1}{3} \cdot A^2 \cdot z_1^3\right)$$

**1.2 Участок** $a \le z_2 \le b$ (Аналитический метод и Mathcad 11 [3] )

$$\sum R_Y = -R_{Ay} \cdot \cos(\theta_2) + P \cdot \cos(\theta_2) + Q_y(z_2) = 0 \Rightarrow \qquad Q_y(z_2) = \left(R_{Ay} - P\right) \cdot \cos(\theta_2)$$

$$\sum m_x(z_2) = z_2 R_{Ay} + M_A - (z_2 - a)P + M_x(z_2) = 0$$

$$M_x(z_2) = -\left(M_A + z_2 R_{Ay} - (z_2 - a) \cdot P\right)$$

$$M_x(z_2) = -\left[M_A + z_2 \cdot \left(P - R_{Cy}\right) - (z_2 - a) \cdot P\right]$$

$$M_x(z_2) = -\left(b \cdot R_{Cy} - a \cdot P + a \cdot P - z_2 \cdot R_{Cy}\right) \tag{6}$$

$$\frac{d\theta_2}{dS_2} = -\left(\underbrace{\frac{R_{Cy}}{EI_x}}_{A_2} \cdot (b - z_2)\right) \Rightarrow \qquad \frac{d\theta_2}{dS_2} \cdot dz_2 = -\left(\underbrace{\frac{R_{Cy}}{EI_x}}_{A_2} \cdot (b - z_2)\right) \cdot dz_2 \;;$$

$$\int \cos(\theta_2) d\theta_2 = \int -\left(A_2 \cdot (b - z_2)\right) \cdot dz_2 \;; \quad \sin(\theta_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2}\left[\underbrace{-A_2 \cdot (b - z_2)}_{\frac{d\theta_2}{dS_2}}\right]^2 + C_2$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{dS_2}\right)_{z_2 = b} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sin\theta_2(b)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2}\left(\frac{d\theta_2}{dS_2}\right)^2 + \sin\theta_2(b) \;;$$

$$\theta_2 = \sin(\theta_2) + \frac{1}{3}\cdot\sin^3(\theta_2) + C_{\theta_2} \quad , C_{\theta_2} = \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3}\cdot\sin^3(\theta_2(b))$$

$$dS_2 = \frac{1}{t_2}d\theta_2 \quad , \quad dy_2 = \frac{\sin(\theta_2)}{t_2}d\theta_2$$

$$S(z_2) = \frac{1}{A_2}\cdot\left(t_2 + \frac{1}{20\cdot A_2^2}\cdot t_2^5 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2}\cdot t_2^3 + \sin^2(\theta_2(b))\cdot t_2\right) + L$$

$$y(z_2) = \frac{1}{A_2}\cdot\left[\frac{1}{56\cdot A_2^3}\cdot t_2^7 + \frac{3}{20}\cdot\frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2^2}\cdot t_2^5 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin^2(\theta_2(b))}{A_2} + \frac{\sin^2(\theta_2(b))}{A_2}\right)\cdot t_2^3 + \left(1+\sin^2(\theta_2(b))\right)\cdot\sin(\theta_2(b))\cdot t_2\right] + \underbrace{C_{y_2}}_{0}$$

**1.3.Участок** $b \le z_3 \le b + \eta_2 L$ (Не рассчитывается )

$$\sum R_Y = -R_{Ay}\cdot\cos(\theta_3) - R_{Cy}\cdot\cos(\theta_3) + P\cdot\cos(\theta_3) + Q_y = 0 \Rightarrow$$

$$Q_y = \left(R_{Ay} + R_{Cy} - P\right)\cdot\cos(\theta_3) = \left(P - R_{Cy} + R_{Cy} - P\right)\cdot\cos(\theta_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y = 0$$

$$\sum m_x(z_3) = M_A + z_3\cdot R_{Ay} - (z_3 - a)\cdot P + (z_3 - b)\cdot R_{Cy} + M_x(z_3) = 0$$

$$M_x(z_3) = -M_A - z_3 R_{Ay} + (z_3 - a)P - (z_3 - b)R_{Cy}$$

$$M_x(z_3) = -\left(b\cdot R_{Cy} - a\cdot P\right) - z_3\cdot\left(P - R_{Cy}\right) + (z_3 - a)\cdot P - (z_3 - b)\cdot R_{Cy} = 0$$

$$M_x(z_3) = 0 \quad (7)$$

Учитывая граничные условия:

$$\sin(\theta_1)_{z_1=a} = \sin(\theta_2)_{z_2=a} \quad ; \quad \sin(\theta_1)_{z_1=a} = \frac{-1}{2\cdot A_1}\cdot\left[-\left(A + A_1\cdot a\right)\right]^2 + \frac{A^2}{2\cdot A_1}$$

$$\sin(\theta_2)_{z_2=a} = \frac{1}{2\cdot A_2}\left[-A_2\cdot(b - z_2)\right]^2 + \sin\theta_2(b); \qquad \left(\theta_2(b),\ \ \theta_1(a) = \theta_2(a) - \textit{определяется экспериментом}\right)$$

$$\left(\frac{d\theta_1}{dS_1}\right)_{z_1=a} = \left(\frac{d\theta_2}{dS_2}\right)_{z_2=a}$$

$R_{Cy}$ , $E\cdot I_x$ определяются сравнением и косвенным измерением, с использованием формул выведенных на **Mathcad 11**.

**II.2. Интеграл вероятности и функция вида $e^{w(\theta)}$.**

**2.1 Функция плотности вероятности. Распределение Гаусса.** В решении задачи на нелинейный изгиб [3], были получены зависимости, особенно на первом участке, график которых на Mathcad 11, был подобен графику функции плотности вероятности. Так как интеграл вероятности, интегралы вида $e^{w(\theta)}$ актуальны и имеют очень сложную природу вычислений (обычно их разлагают в ряд Тейлора или Маклорена), которые не всегда сходятся в рассматриваемом интервале. Пользуясь аналогией произведённых выше выкладок разберём функцию:

Здесь аргумент берётся как «$z_1$».

$$Y(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad \text{èëè}$$

$$Y(z_1) = e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2} + \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\right|}$$

Нормальное распределение (Гаусса) плотности вероятности, где

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_1 - a)^2}{n-1}}$$ – ñòàíäàðòíî å îòêëîíåíèå ñðåäíåàðèô ìåòè÷åñêîã î çíà÷åíèÿ, ïðè n > 20 èçìåðåíèé.

$$s_{x_{iðð}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_1 - a)^2}{n \cdot (n-1)}}$$ – ñðåäíåêâàä ðàòè÷åñêîå îòêëîíåíèå ñðåäíåàðèô ìåòè÷åñêîã î çíà÷åíèÿ,

ïðè n < 20 èçìåðåíèé.

$$a = x_{ñð} \rightarrow x_{ñð} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ ãäå à – èñòèííîå çíà÷åíèå , $x_{ch}$ – ñðåäíåàðèô ìåòè÷åñêîå çíà÷åíèå èçìåðåíèé.

$$W\left(a - \Delta z_1 \le z_1 \le a + \Delta z_1\right) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \int_0^{a+\Delta z_1} e^{-\frac{(z_1 - a)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dz_1$$

| № | $x_i(см)$ | $\Delta x_i = x_i - x_{ср}(см)$ | $\Delta x_i^2 \cdot 10^{-4}(см^2)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 27,12 | +0,05 | 25 |
| 2 | 27,04 | -0,03 | 9 |
| 3 | 26,15 | ------ | ---- |
| 4 | 27,08 | +0,01 | 1 |
| 5 | 27,15 | +0,08 | 64 |
| 6 | 27,12 | +0,05 | 25 |
| 7 | 26,90 | -0,17 | 289 |
| 8 | 27,14 | +0,07 | 49 |
| 9 | 26,95 | -0,12 | 144 |
| 10 | 27,03 | -0,04 | 16 |
| 11 | 27,20 | +0,13 | 169 |
| Всего | 270,73 | ------- | 791 |

**Таблица II.1.** Данные измерения штангенциркулем:

Напоминая, что

$$Y'(z_1) = \frac{dY(z_1)}{dz_1} = \frac{-(z_1 - a)}{\sigma^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(z_1 - a)}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$$Y''(z_1) = \frac{d^2 Y(z_1)}{dz_1^2} = -\frac{1}{\sigma^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(z_1 - a)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot \left[1 - \frac{(z_1 - a)^2}{\sigma^2}\right]$$

*в точке перегиба* $z_1 = z_1^*$ , $Y''(z_1^*) = 0 = -\frac{1}{\sigma^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(z_1^* - a)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot \left[1 - \frac{(z_1^* - a)^2}{\sigma^2}\right]$

$(z_1^*)_{1,2} = a \pm \sigma$ , *так как далее выкладки и сравнения будут для участка* $0 \le z_1 \le a$

$$z_1^* = a - \sigma$$

$$Y'(z_1)=\frac{dY(z_1)}{dz_1}=\frac{-(z_1-a)}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(z_1-a)}{2\cdot\sigma^2}}$$

$$Y''(z_1)=\frac{d^2Y(z_1)}{dz_1^2}=-\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot\left[1-\frac{(z_1-a)^2}{\sigma^2}\right]$$

*в точке перегиба* $z_1=z_1^*$ , $Y''(z_1^*)=0=-\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(z_1^*-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot\left[1-\frac{(z_1^*-a)^2}{\sigma^2}\right]$

$(z_1^*)_{1,2}=a\pm\sigma$ , *так как далее выкладки и сравнения будут для участка* $0\le z_1\le a$

$$z_1^*=a-\sigma$$

$$s_{x_{ch}}=\sqrt{\frac{(25+9+1+64+25+289+49+144+16+169)\cdot 10^{-4}}{10\cdot(10-1)}}=0{,}0297\,\text{ñì}$$

**Табличные данные:**

$W=0{,}95\ (95\,\%)\ \to\Delta z_1=2{,}2281\cdot 0{,}0297=0{,}06617457\,см\approx 0{,}07\,см$,

*не изменяя принятым обозначениям возьмём* $\sigma=s_{x_{ch}}$ ,

*однако выберем правило трёх сигм,* $\Delta z_1=3\cdot\sigma=3\cdot 0{,}0297=0{,}0891\,см\approx 0{,}09\,см$

$a=27{,}07\pm 0{,}09\,см$ *или* $26{,}98см\le a\le 27{,}16\,см$

Пусть

$$Y(z_1)=e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}+\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\right|}=\frac{dS_1}{dz_1}+\frac{dy_1}{dz_1}=e^{w(\theta_1)}$$

*çäåñü* $Y(z_1)\ne y(z_{\cdot 1})$ òî åñòü ðàçíûå ôóíêöèè, èìåþùèå çàâèñèìîñòü ü äðóã ñ äðóãîì.

$$w(\theta_1)=\frac{-(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}+\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\right| \qquad (9)$$

Ïî àíàëîãèè ñ ïðåäûäóùèì è âûêëàäêàìè èìååì :

$$\frac{1}{\cos(\theta_1)}=ch(w)=\frac{e^w+e^{-w}}{2},\ tg(\theta_1)=sh(w)=\frac{e^w-e^{-w}}{2},\ \sin(\theta_1)=th(w)=\frac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}$$

îòñþäà $Y_{11}(z_1)=ch(w)+sh(w)$ èëè ðàçëîæåíèå ì [1]

$$ch(w)=1+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}+\frac{w^6}{6!}+\frac{w^8}{8!}+\frac{w^{10}}{10!}\ ;\ sh(w)=w+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^7}{7!}+\frac{w^9}{9!}+\frac{w^{11}}{11!}$$

$Y_1(z_1)=1+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}+\frac{w^6}{6!}+\frac{w^8}{8!}+\frac{w^{10}}{10!}+w+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^7}{7!}+\frac{w^9}{9!}+\frac{w^{11}}{11!}$ ÷èñëî ïîäáèðàþòñ ÿ

ñîãëàñíî ãðàôè÷åñêîé ñõîäèìîñòè ôóíêöèé $Y(z_1)=Y_1(z_1)$

$$Y(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} \quad \text{èëè}$$

$$Y(z_1) = e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}+\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\right|}$$

Можно было бы разложить и саму функцию. Однако мы преследовали цель доказать правильность, вышеприведенных теоретических выкладок.

*В дальнейшем аргументы функций будут опускатся не изменяя сути решения. Посмотрим ещё одну выкладку*:

$$dw+\sin(\theta_1)\cdot dw = dw = d\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n+1}(\theta_1))}{2\cdot n+1}\right]+\sin(\theta_1)\cdot d\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n+1}(\theta_1))}{2\cdot n+1}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sin^n(\theta_1)\cdot d\sin(\theta_1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sin^n(\theta_1)\cdot d\sin(\theta_1)=\frac{1}{1-\sin(\theta_1)}\cdot d\sin(\theta_1)\ \ (\textit{при}\ \ \sin(\theta_1)<1,$$

*по правилам суммы бесконечных членов геометрической прогрессии.*)

*С другой стороны продолжив преобразование имеем*:

$$\frac{1}{1-\sin(\theta_1)}\cdot d\sin(\theta_1)=dw+\sin(\theta_1)\cdot dw\Rightarrow\frac{\cos(\theta_1)}{1-\sin(\theta_1)}\cdot d\theta_1=\frac{1+\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)}\cdot d\theta_1\Rightarrow\cos^2(\theta_1)=1-\sin^2(\theta_1)$$

*Особые точки* $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ *при которых есть неопределённость.*

*Итак*, $\frac{1}{\cos(\theta_1)}+\frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)}=e^w=Y \Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta_1)}\cdot d\theta_1+\frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)}\cdot d\theta_1=e^w\cdot d\theta_1$

$$dw+\sin(\theta_1)\cdot dw=e^w\cdot\cos(\theta_1)\cdot dw=\frac{1}{ch(w)}\cdot d\,e^w=\frac{1}{\frac{e^w+e^{-w}}{2}}\cdot d\,e^w=\frac{2\cdot e^w}{e^{2\cdot w}+1}\cdot d\,e^w$$

$$\frac{1}{1-\sin(\theta_1)}\cdot d\sin(\theta_1)=\frac{1}{Y^2+1}\cdot d\left(Y^2+1\right)\Rightarrow d\ln\left|\frac{1}{1-\sin(\theta_1)}\right|=d\ln\left|Y^2+1\right|$$

$$\ln\left|\frac{1}{1-\sin(\theta_1)}\right|=\ln\left|Y^2+1\right|+\ln\left|C_*\right|\Rightarrow\left|\frac{1}{1-\sin(\theta_1)}\right|=\left|C_*\right|\cdot\left|Y^2+1\right|\Rightarrow Y^2=\frac{1-C_*+C_*\cdot\sin(\theta_1)}{C_*\cdot\left|1-\sin(\theta_1)\right|}$$

*приравняв* $C_*=\frac{1}{2}$ *имеем* $Y^2=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sin(\theta_1)}{\frac{1}{2}\cdot\left|1-\sin(\theta_1)\right|}=\frac{1+\sin(\theta_1)}{1-\sin(\theta_1)}$

$$\ln\left|\frac{2}{1-\sin(\theta_1)}\right|=\ln\left|Y^2+1\right|\Rightarrow\left(Y^2+1\right)=\left(\frac{2}{1-\sin(\theta_1)}\right)$$

$$\sin(\theta_1)=th(w)=\frac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}=\frac{e^{2w}-1}{e^{2w}+1}=\frac{Y^2-1}{Y^2+1}$$

$$dy(z_1) = tg(\theta_1)\cdot dz_1 \Rightarrow dy(z_1) = sh(w)\cdot dz_1 \quad \text{где} \quad dz_1 = \frac{d\sin(\theta_1)}{\underbrace{f(z_1)}_{\substack{\text{в общем случае} \\ \text{в предыдущей забаче равна } t_1}}}$$

$$dz_1 = \frac{d\,th(w)}{f(z_1)} \;; \quad f(z_1) = \frac{dth(w)}{dz_1} = \frac{1}{ch^2(w)}\cdot\frac{dw}{dz_1} = \frac{1}{ch^2(w)}\cdot\frac{(a-z_1)}{\sigma^2}$$

$$dy(z_1) = sh(w)\cdot\frac{d\,th(w)}{f(z_1)} = sh(w)\cdot ch^2(w)\cdot\frac{\sigma^2}{(a-z_1)}dth(w)$$

$$dy(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot dch(w) \Rightarrow dy(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot d\left(\frac{1}{\cos(\theta_1)}\right)$$

$$dy(z_1) = \frac{-\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot\frac{1}{\cos^2(\theta_1)}d\cos(\theta_1) \quad \text{известно} \quad ,\text{что} \quad f(z_1)\cdot dy(z_1) = -d\cos(\theta_1)$$

$$\text{тогда} \quad f(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot\frac{1}{\cos^2(\theta_1)}$$

$$dy(z_1) = \frac{-\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot\frac{1}{\cos^2(\theta_1)}d\cos(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot\sin(\theta_1)\cdot dtg(\theta_1)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta_1)}\cdot dy(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot dtg(\theta_1) \Rightarrow \frac{dS(z_1)}{dy(z_1)}\cdot dy(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot dtg(\theta_1)$$

$$dy(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot\sin(\theta_1)\cdot dtg(\theta_1) \;; \quad dS(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot dtg(\theta_1) \quad \text{или}$$

$$dy(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot\cdot d\,ch(w) \;; \quad dS(z_1) = \frac{\sigma^2}{(a-z_1)}\cdot dsh(w)$$

*где с учётом сходимости* [1]:

$$ch(w) = 1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^6}{6!} + \frac{w^8}{8!} + \frac{w^{10}}{10!} \;; \quad sh(w) = w + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \frac{w^7}{7!} + \frac{w^9}{9!} + \frac{w^{11}}{11!}$$

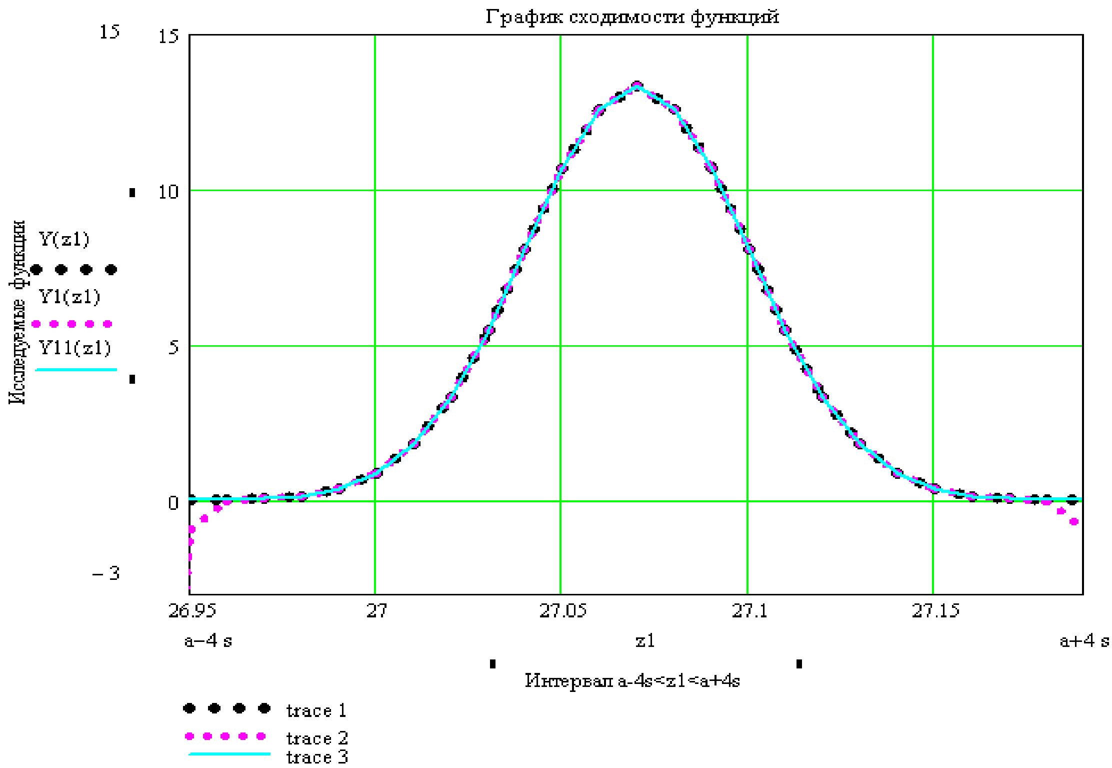



**Рис. II. 2.** График сходимости функций, полученных вышеуказанными методами.

Для анализа сходимости интервал $z_1 \in [a-4\cdot\sigma; a+4\cdot\sigma]$ взят шире.

Напомним, что $s_{x_{cp}} = \sigma.$

$$Y(z_1) = e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}+\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\right|} \quad или \quad Y(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(z_1-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

$$Y_1(z_1) = 1+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}+\frac{w^6}{6!}+\frac{w^8}{8!}+\frac{w^{10}}{10!}+w+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^7}{7!}+\frac{w^9}{9!}+\frac{w^{11}}{11!}$$

$$Y_{11}(z_1) = sh(w)+ch(w) \qquad (10)$$

**2.2 Уравнение Риккати и функция вида** $e^{w(\theta)}$

$w(\theta) = w(\theta(z))$ сложная функция. По аналогии с предыдущими выкладками аргумент берём как “z”, но без индексов (обычно “x”).

**Распишем уравнение Риккати.**

$$\frac{dY(z)}{dz} = a(z)\cdot Y^2(z)+b(z)\cdot Y(z)+c(z) \qquad \textbf{(9)}$$

поиск функции будем вести как $Y(z) = e^{w(z)}$

$$\frac{dS}{dz}+\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\cos(\theta)}+tg(\theta)=e^{w(z)}=Y(z)$$

$$\frac{dS}{dz}-\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\cos(\theta)}-tg(\theta)=e^{-w(z)}=\frac{1}{Y(z)}$$

ÿñíî, ÷òî $Y(z)\neq y(z)$ òàê êàê

$$y(z)=\int Y(z)\,dz-S(z)+C$$

Напоминая, что

$$dw=d\sin(\theta)+d\Delta w=d\sin(\theta)+\sin^{2}(\theta)\underbrace{dw}_{d\sin(\theta)+d\Delta w}$$

*расщепляя получим* $dw=d\sin(\theta)+\sin^{2}(\theta)d\sin(\theta)+\sin^{4}(\theta)d\sin(\theta)+.....$

$$dw=\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2\cdot n}\left(\theta)\right)\cdot d\sin(\theta)=d\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2\cdot n+1}\left(\theta)\right)}{2\cdot n+1}\right]$$

Начнём преобразования:

$$\frac{dY(z)}{dz}=a(z)\cdot Y^{2}(z)+b(z)\cdot Y(z)+c(z)$$

$$\frac{dw}{dz}=b(z)+a(z)\cdot Y(z)+\frac{c(z)}{Y(z)}=b(z)+a(z)\cdot e^{w}+c(z)\cdot e^{-w}$$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\cos(\theta)}\cdot\frac{d\theta}{dz}=\frac{f(z)}{\cos^{2}(\theta)}=b(z)+a(z)\cdot e^{w}+c(z)\cdot e^{-w}$$

$$\frac{1}{\cos^{2}(\theta)}=\frac{b+a(z)\cdot e^{w}+c(z)\cdot e^{-w}}{f(z)}$$

Следует обратить внимание, что функция

$f(z)=\dfrac{d\theta}{dS}$ *опредлённая в начале раздела будет*

*использоватся здесь, как вспомогательная промежуточная.*

$$\frac{1}{1-\sin^2(\theta)}=\frac{1}{(1-\sin(\theta))\cdot(1+\sin(\theta))}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\sin(\theta)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sin(\theta)}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\sin(\theta)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sin(\theta)}=\frac{b+a(z)\cdot e^{w}+c(z)\cdot e^{-w}}{f(z)}$$

$$\frac{f(z)}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-\sin(\theta)}+\frac{1}{1+\sin(\theta)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(\theta)\cdot d\theta}{dz}\left(\frac{1}{1-\sin(\theta)}+\frac{1}{1+\sin(\theta)}\right)=b+a(z)\cdot e^{w}+c(z)\cdot e^{-w}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\left(\underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}}_{Y(z)=e^{w}}+\underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}}_{\frac{1}{Y(z)}=e^{-w}}\right)=b(z)+a(z)\cdot\underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}}_{Y(z)=e^{w}}+c(z)\cdot\underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}}_{\frac{1}{Y(z)}=e^{-w}}$$

$$e^{w}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}-a(z)\right)+e^{-w}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}-c(z)\right)=b(z)$$

Распишем последнее выражение, как и решим квадратные уравнения:

$$e^{w}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}-a(z)\right)+e^{-w}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}-c(z)\right)=b(z)\Rightarrow Y(z)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}-a(z)\right)+\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}-c(z)\right)}{Y(z)}\cdot=b(z)$$

$$1)\ Y^2(z)\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)+b(z)\cdot Y(z)+\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)=0$$

$$D_1(z)=b^2(z)-4\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)$$

$$Y(z)_{1,2}=\frac{-b(z)\pm\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}\ \to\ Y(z)_1=\frac{-b(z)+\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}\ ;\ Y(z)_2=\frac{-b(z)-\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}$$

$$2)\ \frac{\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}{Y^2(z)}+\frac{b(z)}{Y(z)}+\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)=0$$

$$D_2(z)=b^2(z)-4\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)$$

$$\frac{1}{Y(z)_{1,2}}=\frac{-b(z)\mp\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}\ \to\ \frac{1}{Y(z)_1}=\frac{-b(z)-\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}\ ;\frac{1}{Y(z)_2}=\frac{-b(z)+\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}$$

Î÷åâèäíî ÷òî, $D_1(z)=D_2(z)=D(z)$

$$Y(z)_{1,2}\cdot\frac{1}{Y(z)_{1,2}}=1=\frac{-b(z)\pm\sqrt{D_1(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}\cdot\frac{-b(z)\mp\sqrt{D_2(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}$$

Ïîèñê ÷àñòíîãî ðåøåíèÿ óðàâíåíèÿ íà÷í¸ì íèæåñëåäóþ ùèì îáðàçîì

$$Y(z)_1 \cdot \frac{1}{Y(z)_1} = 1 = \frac{-b(z)+\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)} \cdot \frac{-b(z)-\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}$$

$$\frac{-b(z)+\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)} \cdot \frac{-b(z)-\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)} = \frac{\dfrac{-b(z)+\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)} + \dfrac{-b(z)-\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}}{2}$$

÷òî ñîãëàñíî [3] ñîîòâåòñòâó åò ðàâåíñòâó ñðåäíåãåîì åòðè÷åñêîãî

ñðåäíåàðèô ìåòè÷åñêîì ó ïðè ìàëûõ òåêóùèõ óãëàõ $\theta \approx \sin(\theta)$

Åñëè ïðåäñòàâèò ü:

$$Y(z)_1 \cdot \frac{1}{Y(z)_1} = \sqrt{\frac{1+\sin(\theta)_1}{1-\sin(\theta)_1}} \cdot \sqrt{\frac{1-\sin(\theta)_1}{1+\sin(\theta)_1}} = \frac{\dfrac{1+\sin(\theta)_1+\frac{1}{1-\sin(\theta)_1}}{2} + \dfrac{1-\sin(\theta)_1+\frac{1}{1+\sin(\theta)_1}}{2}}{2} = 1$$

*òàê êàê* $\cos^2(\theta) \approx 1$

$$\frac{\dfrac{-b(z)+\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(a(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)} + \dfrac{-b(z)-\sqrt{D(z)}}{2\cdot\left(c(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dz}\right)}}{2} = 1\ ; \quad \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{1,2} = a(z)+c(z) \pm b(z)$$

*зная* , *что* $\dfrac{dw}{dz} = b(z) + a(z)\cdot Y(z) + \dfrac{c(z)}{Y(z)} = b(z) + \dfrac{a(z)+c(z)+\left[a(z)-c(z)\right]\cdot\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$\dfrac{d\theta}{dz} = b(z)\cdot\cos(\theta) + a(z) + c(z) + \left[a(z)-c(z)\right]\cdot\sin(\theta)$ *обратно же* $\cos^2(\theta) \approx \cos(\theta) \approx 1$

*таким образом* $\dfrac{d\theta}{dz} = b(z) + a(z) + c(z)$ *подставив её в*

$Y^2(z)\cdot\left(a(z)-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d\theta}{dz}\right) + b(z)\cdot Y(z) + \left(c(z)-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d\theta}{dz}\right) = 0$ *находим частное решение* .

Полученное последнее выражение позволяет найти общее решение [3]

$$d\theta = d\sin(\theta) + \frac{1}{3}\cdot d\sin^3(\theta) \quad \text{для} \ -75^0 \le \theta \le +75^0 \ \text{текущих углов точек.}$$

$$d\theta = d\sin(\theta) \ \text{для малых углов, представив} \ \frac{d\theta}{dz} = \frac{d\sin(\theta)}{dz} = b(z) + a(z) + c(z)$$

$$-35^0 \le \theta \le +35^0$$

$$\sin(\theta) = \int \left(b(z) + a(z) + c(z)\right)\cdot dz + C_\theta$$

$$\frac{dw(\theta)}{dz} = \frac{d\sin(\theta)}{dz} + \frac{\sin^2(\theta)}{1-\sin^2(\theta)}\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dz}$$

$$Y(z)\frac{dw(\theta)}{dz} = a(z)\cdot Y^2(z) + b(z)\cdot Y(z) + c(z) \Rightarrow a(z)\cdot Y^2(z) + \left[b(z) - \frac{dw(\theta)}{dz}\right]\cdot Y(z) + c(z) = 0$$

*решив последнее квадратное уравнение получим искомые общие решения*:

$$Y(z)_1 = \frac{-1}{2}\cdot\frac{b(z) - \frac{dw(\theta)}{dz} + \left[b^2(z) - 2\cdot b(z)\cdot\frac{dw(\theta)}{dz} + \left(\frac{dw(\theta)}{dz}\right)^2 - 4\cdot a(z)\cdot c(z)\right]^{\frac{1}{2}}}{a(z)}$$

$$Y(z)_2 = \frac{-1}{2}\cdot\frac{b(z) - \frac{dw(\theta)}{dz} - \left[b^2(z) - 2\cdot b(z)\cdot\frac{dw(\theta)}{dz} + \left(\frac{dw(\theta)}{dz}\right)^2 - 4\cdot a(z)\cdot c(z)\right]^{\frac{1}{2}}}{a(z)}$$

$$w(\theta) = \int\left[1 + \frac{\sin^2(\theta)}{1-\sin^2(\theta)}\right]\cdot d\sin(\theta) + C_w$$

$$Y(z)_3 = e^{w(\theta)}$$

*Примечание*: *при* $a(z) = 0$ *следует брать сколь угодно малую величину близкую к нулю.*

Проверка графической сходимости на Mathcad **11**

*Как* $Y(z)_4$ *возмём решения уравнений Риккати из* [5], [6]

1) $z\cdot\frac{dY}{dz} - Y^2(z) = -(2\cdot z + 1)\cdot Y + z^2 + 2\cdot z$ ; *решение* $Y(z)_4 = z + \frac{1}{1 + C\cdot z}$

2) $\frac{dY}{dz} - 2\cdot z\cdot Y + Y^2 = 5 - z^2$ ; *решение* $Y(z)_4 = z + 2 + \frac{4}{C\cdot e^{4\cdot z} - 1}$; $Y(z)_8 = z + 2$

3) $z\cdot\frac{dY}{dz} = Y^2 - 3\cdot Y + 4\cdot z^2 + 2$ ; *решение* $Y(z)_4 = 2\cdot z\cdot tg(2\cdot z + C)$

4) $z^2\cdot\frac{dY}{dz} = z^2\cdot Y^2 + z\cdot Y + 1$ ; *решение* $Y(z)_4 = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z\cdot(C - \ln|z|)}$

5) $\frac{dY}{dz} = -6\cdot Y^2 + \frac{1}{z^2}$ ; *решение* $Y(z)_4 = \frac{-1}{3\cdot z}$ ; $C = 0$

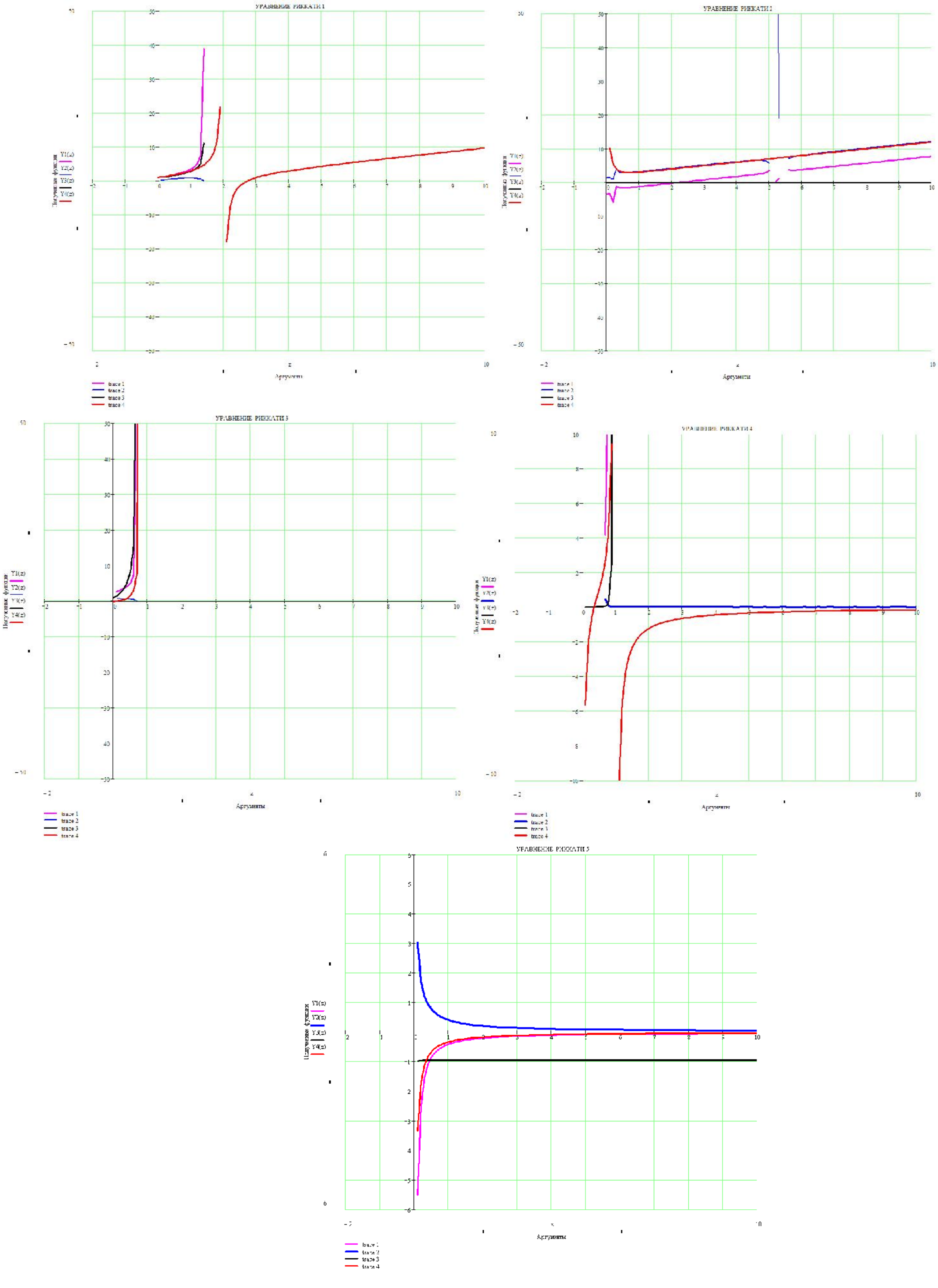


**Рис. 3.** График сходимости функций-решений уравнения Риккати полученные через вышепроизведённые выкладки и через [5], [6].

**III. Вывод:** Выкладки применённые по аналогии задачи нелинейного поперечного изгиба и график сходимости функций, полученных результате разбора функции плотности вероятности (**Нормальное-Гауссовское распределение**), а также удовлетворительная сходимость функций-решений **уравнения Риккати** дают основание полагать, что такие расчёты возможны и для более сложных функций вида- $e^{w(\theta)}$, *где* $w(\theta)$ – *может представлять различные сложные функции*.

**Литература:**

1. Двайт Г.Б. Таблица интегралов. – Москва: «Наука», 1973. - С. 150-160.
2. Попов Е.П. Теория и расчёт гибких упругих стержней. - Москва: «Наука», 1973. - С. 292.
3. Исаев А.Д. Задача о поперечном нелинейном изгибе. - Журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана». - Бишкек 2015, №4. - С. 28-50.
4 Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. - Москва, 1963. - С. 359.
5. Мухарлямов Р.К., Панкратьева Т.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. - Казань, 2007. - С. 45.
6. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». - Ижевск, 2000. - С. 176.

**Рецензент: д.т.н., профессор Маймеков З.К.**