Садыкова Б.А.

ИМПУЛЬСТУН ТААСИРИ АСТЫНДАГЫ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУНУН АСИМПТОТИКАЛЫК БААСЫ

Садыкова Б.А.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

B.A. Sadykova

ASYMPTOTIC MARKS OF SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENRIAL EQUATION WITH IMPULSIVE PRESSURE

УДК: 157.9

Бул макалада сызыктуу эмес сингулярдык дүүлүккөн интегро-дифференциалдык теңдеме каралды жана $(0,1]$ *жарым аралыгында* $\varepsilon \to 0$ *учурундагы кесиндидеги үзгүлтүктүү чыгарылышынын жалгыздыгы жөнүндө теорема келтирилди.*

Негизги сөздөр: *сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме, импульстун таасири, үзгүлтүктүү чыгарылыш, Дирактын функциясы, Хевисайддын тепкичтүү функциясы, биринчи түрдөгү үзүлүү, кичине параметр.*

В данной статье рассматривается нелинейное сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение с импульсным воздействием и приведена теорема о существовании и единственности разрывного решения этого уравнения на полусегменте $(0,1]$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: *нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, импульсное воздействие, разрывное решение, функция Дирака, ступенчатая функция Хевисайда, разрыв первого рода, малый параметр.*

This article considered nonlinear singularly perturbed integro-differenrial equation with impulsive pressure and given a theorem on the existence and uniqueness of discontinuous solutions of the equations on the half-open interval $(0,1]$ *with* $\varepsilon \to 0$

Key words: *nonline integro-differential equation, impulse action, breaking decision, the Dirac's delta function, Heaviside's step function, the first kind of gap, a small parameter.*

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с импульсным воздействием в виде:

$$\varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = \lambda\int_0^1 K(x,t)y(t)dt + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)f_k(x) + f_0(x) + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}A_k\delta(P_k) + \varepsilon g(x,y,\int_0^1 Q(x,t)ydt). \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(0) = b, \tag{2}$$

где A_k, b - заданные постоянные, λ - некоторый параметр, $\varepsilon > 0$ - малый положительный параметр, $a(x), f_k(x)$ - непрерывные функции на сегменте $[0,1]$, причем $a(x) > 0$, $K(x,t), g(x,y,q(x)), q(x) \equiv \int_0^1 Q(x,t)y(t)dt$ - непрерывные функции на области $[0 \le x,t \le 1], 0 < x_1 < x_2 < ... < x_N < 1$ - некоторые известные числа, $P_k = x - x_k$, $\theta(x)$ - функция Хевисайда $\theta(+0) = 1, \theta(0) = 0$, $\theta'(x) = \delta(x)$ - функция Дирака, $\delta(x) = \begin{cases} 0, x \ne 0, \\ \infty, x = 0, \end{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1.$

Формально полагая $\varepsilon = 0$ из (1) получим

$$a(x)v(x) = \lambda\int_0^1 K(x,t)v(t)dt + f_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)f_k(x). \tag{2$_0$}$$

Решение нелинейного интегрального уравнения (2_0) ищем в виде:

$$v(x) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)v_k(x), \tag{2$_1$}$$

где $\left[v_0(x), v_k(x)\right]$ - пока неизвестные функции.

Подставляя (2_1) в (2_0) получим

$$a(x)\left[v_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)v_k(x)\right]=$$
$$=\lambda\int_0^1 K(x,t)\left(v_0(t)+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)v_k(x)\right)dt+f_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)f_k(x). \qquad (2_2)$$

Учитывая свойства функции Хевисайда получим следующих линейных интегральных уравнений в виде:

$$a(x)v_0(x)=\lambda\int_0^1 K(x,t)v_0dt+f_0(x),(0\le x\le 1), \qquad (2_3)$$

$$a(x)v_1(x)=\lambda\int_{x_1}^1 K(x,t)v_1(t)dt+f_1(x),(x_1\le x\le 1), \qquad (2_4)$$

$$a(x)v_2(x)=\lambda\int_{x_2}^1 K(x,t)v_2dt+f_2(x),(x_2\le x\le 1), \qquad (2_5)$$

…………………………………………

$$a(x)v_N(x)=\lambda\int_{x_N}^1 K(x,t)v_N(t)dt+f_N(x),(x_N\le x\le 1), \qquad (2_N)$$

Так как λ - не является собственным значением ядра $a^{-1}(x)K(x,t)$. Предполагается, что линейное неоднородное интегральное уравнение (2_3)-(2_N) имеют единственное решение относительно $v_0(x),v_1(x),...,v_N(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть 1) $a(x), f_k(x), K(x,t), Q(x,t)$ - известные непрерывно-дифференцируемые функции на сегменте $\left(0\le \begin{matrix}x\\t\end{matrix}\le 1\right)$, 2) $a(x)>0, \lambda$ - некоторый параметр и неявляется собственным значением ядра $a^{-1}(x)K(x,t)$. Тогда при достаточно малых значениях ε, ($\varepsilon\le\varepsilon_{0k}$. ε_{0k} - фиксированное число), нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет единственное разрывное решение представимое в виде:

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k(x)=v_0(x)+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\xi_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)\cdot\left[v_k(x)+\Pi_k(\tau_k)+\varepsilon\xi_k(x,\varepsilon)\right],$$

где $\left|\Pi_0\right|\le C_0e^{-\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}}, \left|\Pi_k\right|\le C_ke^{-\alpha_k\frac{(x-x_k)}{\varepsilon}}, \alpha_0,\alpha_k>0, \left|\xi_0\right|\le C_{00}, \left|\xi_k\right|\le C_{0k}, C_0, C_k, C_{00}, C_{kk}$ - некоторые $const$, причем не зависит от ε, x, причем при $\varepsilon\to 0$ это решение сходится к разрывному решению вырожденного уравнения (2_1) на полусегменте $(0,1]$.

Решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k(x), \qquad (3)$$

где y_0, y_k - пока неизвестные функции.

$$y_0(0)=b. \qquad (3_0)$$

Из (1), (3) получаем

$$\varepsilon y_0' + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\delta(P_k)y_k(x_k) + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k'(x) + a(x)[y_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k] =$$

$$= \lambda\int_0^1 K(x,t)[y_0(t) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k(t)]dt + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)f_k(x) + \qquad (3_1)$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{N}A_k\delta(P_k) + f_0(x) + \varepsilon g(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k, \int_0^1 Q(x,t)(y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k)dt).$$

Приравнивая коэффициенты при $\delta(P_k)$ получим

$$y_k(x) = A_k, k = \overline{1,N} \ . \qquad (3_2)$$

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение приводится к виду:

$$\varepsilon y_0' + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k' + a(x)[y_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k] = \lambda\int_0^1 K(x,t)[y_0(t) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k(t))y_k(t)]dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)f_k(x) + \varepsilon g(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k, \int_0^1 Q(x,t)(y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)y_k)dt) + f_0(x). \qquad (3_3)$$

Отсюда приравнивая коэффициенты при $\theta(P_k)$ получим следующую цепочку нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\varepsilon y_0' + a(x)y_0(x) = \lambda\int_0^1 K(x,t)y_0(t)dt + f_0(x) + \varepsilon g(x, y_0, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt), (0 \le x \le 1) \qquad (4_0)$$

$$y_0(0) = b,$$

$$\varepsilon y_1' + a(x)y_1(x) = \lambda\int_{x_1}^1 K(x,t)y_1(t)dt + f_1(x) +$$

$$+\varepsilon[g(x, y_0 + y_1, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt + \int_{x_1}^1 Q(x,t)y_1 dt) - g(x, y_0, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt)], (x_1 \le x \le 1) \qquad (4_1)$$

$$y_1(x_1) = A_1.$$

$$\varepsilon y_2' + a(x)y_2(x) = \lambda\int_{x_2}^1 K(x,t)y_2(t)dt + f_2(x) + \varepsilon[g(x, y_0 + y_1 + y_2, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt +$$

$$+\int_{x_1}^1 Q(x,t)y_1 dt + \int_{x_2}^1 Q(x,t)y_2 dt) - g(x, y_0 + y_1, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt + \int_{x_1}^1 Q(x,t)y_1 dt)], (x_2 \le x \le 1) \qquad (4_2)$$

$$y_2(x_2) = A_2.$$

$$\varepsilon y_N' + a(x)y_N(x) = \lambda\int_{x_N}^1 K(x,t)y_N(t)dt + f_N(x) + \ldots + \varepsilon[g(x, \sum_{k=0}^{N}y_k, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{x_k}^1 Q(x,t)y_k dt) - g(x, \sum_{k=0}^{N-1}y_k, \int_0^1 Q(x,t)y_0 dt + \sum_{k=1}^{N-1}\int_{x_k}^1 Q(x,t)y_k dt)], (x_N \le x \le 1) \qquad (4_N)$$

$$y_N(x_N) = A_N.$$

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (4_0)-(4_N) соответственно имеет единственное решение:

$$
\begin{aligned}
&y_0(x) = v_0(x) + \Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon),\\
&y_1(x) = v_1(x) + \Pi_1(\frac{x-x_1}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_1(x,\varepsilon),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_N(x) = v_N(x) + \Pi_N(\frac{x-x_N}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_N(x,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Подставляя (5) в (3) мы получим разрывное решение нелинейного интегоро-дифференциального уравнения в виде:

$$
y(x,\varepsilon) = v_0 + \Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N}\theta(P_k)(v_k(x) + \Pi_k(\frac{x-x_k}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_k(x,\varepsilon)),
$$

где $\Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) \le C_0 e^{-\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}}, \left|\Pi_k\right| \le e^{-\alpha_k\frac{x-x_k}{\varepsilon}}C_k, \left|\xi_0\right|, \left|\xi_k\right| \le C_k = const$ при $\varepsilon \to 0$ это решение сходится к разрывному решению на сегменте $0 < x \le 1$.

Таким образом, совершается доказательство теоремы.

Литература:

1. Иманалиев М. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972.
2. Kakishov K., Kakishov J.K. Asymptotical methods in the theory of singularly perturbed ordinary differential equations with discontinuous solutions of corresponding degenerate equation, Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. - Almaty, 2009. - P. 321-330.

Рецензент: д.ф.-м.н., доцент Темиров Б.К.