ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Омуралиев А.С., Шейшенова Ш.К.

АДДИТИВДҮҮ ТЕЗ ТЕРМЕЛГЕН БОШ МҮЧӨСҮ БОЛГОН УЧУРДАГЫ ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ ПАРАБОЛАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Омуралиев А.С., Шейшенова Ш.К.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АДДИТИВНОЙ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

A.C. Omuraliev, Sh.K. Sheishenova

OSIMTATIC DETERMINATES PARABOLIC PROBLEMS AND THE RIGHT PART IS ADDITIVE QUICK- OSCILLATE

УДК: 621.396.96/32.95

Макалада пределдик оператордун спектри болбогон учурда,сингулярдуу козголгон эки ченемдүү параболалык маселелердин регулярыштырылгын чыгарылыштын асимптотикасы каралган. А оң жагы аддитивдүү тез термелген функция болгон. Бул жерде аддитивдүү тез термелген бош мүчөсү бар скалярдык сингулярдуу козголгон параболалык маселелердин регулярыштырылган чыгарылышынын асимптотикасы тургузулгун.

***Негизги сөздөр:** параболалык тибиндеги дифференциалдык теңдемелер, сингулярдуу козголгон параболалык маселелер, параболалык чек катмар, бурчтук чек катмар,регулярыштырылган асимптотика.*

В статье строится регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной двумерной параболической задачи, когда отсутствует спектр предельного оператора. А правая часть является аддитивной быстроосциллирующей функцией. Здесь подстроена асимптотика решения двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи, в случае, когда свободный член состоит аддитивной быстроосцилирующих функций.

***Ключевые слова:** дифференциальные уравнения параболического типа, сингуярно возмущенные параболические задачи, параболический пограничный слой, регуляризованная асимптотика, угловой пограничный слой.*

In this article constructs relative osimtatic determinates of singular two measured parabolic problems and here is absent spectr-predation of operator. And the right part is additive quick- oscillate function. It is obtained with the osimtatic behavior of multi-faceted parabolic boundary layer function.

***Key words:** differential equations of parabolic type, singularly perturbed parabolic problems, regularization of asymptotic solution, parabolic boundary layer, angular boundary layer.*

П. 1. Постановка задачи. Развивая идеи работ [1] - [3] строится регуляризованная асимптотика решения двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи, когда свободный член является конечной суммой быстроосциллирующих функций. Здесь получена асимптотика с многомерной параболической погранслойной функцией. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 \Delta u - b(x,t)u = \sum_{k=1}^{m} f_k(x,t) \exp\left(\frac{i\theta_k(t)}{\varepsilon}\right), (x,t) \in \Omega_1,$$

$$u(x,t,\varepsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x,t,\varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (1)$$

где $\Omega_1 = \Omega \times (0,T]$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2): x_1, x_2 \in (0,1)\}$.

Здесь $\varepsilon > 0$ -малый параметр, $i=\sqrt{-1}$, $\Delta \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$.

Предположим выполненными следующие условия:

1. функции $b(x,t), f(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega_1}), h(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \theta(t) \in C^\infty[0,T]$;
2. $\forall t \in [0,T]$ функция $\theta'(t) \neq 0$;
3. выполнены условия согласования начальных и граничных условий $h(x)|_{\partial\Omega} = 0$,

П. 2. Регуляризация задачи.

Произведем расширение исходной задачи. Для чего введем регуляризующие переменные

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^2},\ \mu_k = \frac{\theta_k(t) - \theta_k(0)}{\varepsilon},\ \ \eta_l = \frac{x_l}{\varepsilon^2},\ \eta_{2+l} = \frac{1-x_l}{\varepsilon^2},\ \xi_l = \frac{x_l}{\varepsilon},\ \ \xi_{2+l} = \frac{1-x_l}{\varepsilon},\qquad l = 1,2,\ \ k = 1,2,\dots,m$$

и объявим их, наряду с переменными (x_1,x_2,t), независимыми переменными расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon),\ M = (x,t,\xi,\eta,\zeta,q,v)$ такой, что $\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon)$,
(2)

Для расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ поставим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon^2} T_1 \tilde{u}(m,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} \theta_k'(t)\, \partial_{\mu_k} \tilde{u}(M,\varepsilon) + T_2 \tilde{u}(M,\varepsilon) - L_\eta \tilde{u}(M,\varepsilon) - \varepsilon L_\xi \tilde{u}(M,\varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta \tilde{u}(M,\varepsilon))$$
$$= \sum_{k=1}^{m} f_k(x,t) \exp\left(i\mu_k + \frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right),\qquad M \in Q,$$

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=\tau=v=0} = h(x),\ \ \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\partial Q_1} = 0,$$
(3)

здесь введены обозначения

$$Q = \Omega_1 \times D \times \{\tau \geq 0\} \times \{v \in R\},\qquad D = \{\xi,\eta,\zeta,q \geq 0\},\qquad Q_1 = \Omega \times D,$$

$$T_1 \equiv \partial_\tau - \Delta_\eta,\qquad T_2 \equiv \partial_t - \Delta_\xi - b(x,t),\quad L_\zeta \equiv \sum_{l=1}^{2} L_{\zeta,l},$$

$$\Delta_\eta \equiv \sum_{l=1}^{4} \partial^2_{\eta_l},\ \ \Delta_\xi \equiv \sum_{l=1}^{4} \partial^2_{\xi_l},\ \ L_\eta \equiv \sum_{l=1}^{2} L_{\eta,l},\quad L_\xi \equiv \sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l}$$

$$L_{\eta,l} \equiv 2(\partial^2_{x_l,\eta_l} - \partial^2_{x_l \eta_{2+l}}),\qquad L_{\xi,l} \equiv 2(\partial^2_{x_l,\xi_l} - \partial^2_{x_l,\xi_{2+l}}).$$

Расширенная задача (3) регулярна по ε при $\varepsilon \to 0$, ибо имеет место тождество:

$$\left(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon)\right)|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon). \qquad (4)$$

Поэтому вправе искать решение расширенной задачи (3) в виде ряда обычной теории возмущения

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(M) \qquad (5)$$

П. 3. Решение итерационных задач

Итерационные задачи будем решать в специальном классе функций. Малый параметр при лапласиане приводит к возникновению параболических пограничных слоев вдоль $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1$ и угловых пограничных слоев вдоль ребер. Быстроосциллирующая функция присутствующая в правой части также приводит к возникновению пограничного слоя вдоль $t=0$, имеющий такой же характер изменения. Исходя из сказанного вытекает, что этим классом решения является класс функций:

$$U = \left\{u(M) : u(M) = v(x,t) + Z(N_2) + \sum_{k=1}^{n} \exp(i\mu_k)\,[c_k(x,t) + Y_k(N_1)]\right\}$$

$$||Z_l(N_2)|| < c \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{8t}\right),\ \ ||Y_l(N_l)|| < c\, exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right), \qquad (6)$$

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2},\qquad N_1 = (x,t,\tau,\eta),\ \ N_2 = (x,t,\xi).$$

Из этих соотношений определим начальные условия для произвольных функций входящих в *u(M):*

$$v(x,t)|_{t=0} = h(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k(x,0), \quad Y_k(N_1)|_{\tau=0} = 0, \qquad Z(N_2)|_{t=0} = 0,$$

$$Y_k(N_1)|_{\eta_k=0} = \omega_k(x,t), \qquad \omega_k|_{x_l=l-1} = -c_k(x,t)|_{x_l=l-1},$$

$$Z(N_2)|_{\xi_k=0} = d_k(x,t), \qquad d_k(x,t)|_{x_l=l-1} = -v(x,t)|_{x_l=l-1} \qquad (7)$$

l=1,2, k=1,2,3,4

Функция

$$u_0(M) = v_0(x,t) + Z_0(N_2) + \sum_{k=1}^{m} \exp(i\mu_k)\left[c_{k,0}(x,t) + Y_k^0(N_1)\right]. \quad (8)$$

является решением итерационного уравнения при *k=0.* Она будет удовлетворять, если $Y_k^0(N_1)$ будут решениям уравнений

$T_1 Y_k^0(N_l) = 0.$

Решение этого уравнения удовлетворяющее условиям (7) имеет вид (см.с.196 [4]).

$$Y_k^0(N_1) = \sum_{m=1}^{4} \omega_{k,m}^0(x,t) \iint_0^{\tau} \partial_{\sigma_m}\left(G(\eta,\sigma,\tau-l)\right)_{\sigma_m=0} d\sigma' dv =$$

$$= \sum_{m=1}^{4} \omega_{k,m}^0(x,t) I_k(\eta,\tau), \qquad G(\eta,\sigma,t) = \frac{1}{2(\sqrt{\pi t})^4} \prod_{m=1}^{4} H_m(\eta,\sigma_m,t),$$

$$H_m(\eta,\sigma_k,t) = \exp\left(-\frac{(\eta_k-\sigma_k)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(\eta_k+\sigma_k)^2}{4t}\right).$$

Нетрудно устоновить оценку

$$\|Y_k^0(N_1)\| < c\, exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right), \quad |\eta| = \sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2+\eta_4^2}.$$

Вычислим правую часть итерационного уравнения при k=2 имеем, что $c_{k,0}(x,t) = 0$ и

$$F_2(M) = -\sum_{k=1}^{m} i\theta_k'(t)\left[c_{k,1}(x,t) + Y_k^1(N_1)\right] exp(i\mu_k) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} f_k(x,t)\exp\left(i\mu_k + \frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right) - \left[\partial_t v_0 - b(x,t)v_0\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \exp(i\mu_k) \sum_{l=1}^{2}\left[\partial_t Y_k^0 - b(x,t)Y_k^0\right] - \partial_t Z_0(N_2) + b(x,t)Z_0(N_2) +$$

$$+\Delta_\xi Z_0(N_2) + L_\eta Z_0(N_2).$$

Обеспечивая разрешимость итерационного уравнения при k=2 в классе U положим

$$i\theta_k'(t) c_{k,1}(x,t) = f_k(x,t)\exp\left(\frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right),$$

$$\partial_t v_0(x,t) - b(x,t)v_0(x,t) = 0,$$

$$L_\eta Y_k^0 = 0, \qquad \partial_t \omega_{k,m}^0(x,t) - b(x,t)\omega_{k,m}^0(x,t) = 0,$$

$$\partial_t Z_0(N_2) - b(x,t)Z_0(N_2) - \Delta_\xi Z_0 = 0. \qquad (9)$$

Решением последнего уравнения, удовлетворяющее условию из (7), будет

$$Z_0(N_2) = \sum_{k=1}^{m} d_m^0(x,t) \int_0^t \int_{E_3} \partial_{\sigma_m}\left(G(\xi,\sigma,t-l)\right)_{\sigma_m=0} d\sigma' dv.$$

причем справедлива оценка

$$\|Z_0(N_2)\| < c\ exp\left(-\frac{|\xi|^2}{8t}\right).$$

Функция $Y_k^0(N_1)$ выражаются через $c_{k,0}(x,t) = 0$, поэтому $Y_{l,k}^0(N_1) = 0$,

где $d_m^0(x,t)$ должен быть решением задачи

$$\partial_t d_m^0(x,t) - b(x,t)\, d_m^0(x,t) = 0, \qquad d_m^0(x,t)|_{t=0} = \check{d}_m^0(x). \qquad \textbf{(10)}$$

Уравнения относительно $\omega_{k,m}^0(x,t)$ решая при произвольных начальных условиях $\omega_{k,m}^0(x,t)|_{t=0} = \tilde{\omega}_{k,m}^0(x)$,

получим

$$\omega_{k,m}^0(x,t) = \omega_{k,m}^0(x)\, B(x,t), \qquad B(x,t) = \int_0^t b(x,s)\, ds.$$

Подставим эту функцию в граничные условия из (7) и в соотношение

$$\mathrm{L}_\eta Y_k^0(N_1) = 2\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{2}\left[\partial_{x_l}\omega_{k,m}^0(x,l)\,\partial_{\eta_l} I_k(\eta,\tau) - \partial_{x_l}\omega_{k,m}^0(x,t)\,\partial_{\eta_{2+l}} I(\eta,\tau)\right] = 0$$

или полагая

$$\partial_{x_l}\omega_{k,m}^0(x,t) = \partial_{x_l}\tilde{\omega}_{k,m}^0(x,l)B(x,t) - \partial_{x_l}B(x,t)\,\tilde{\omega}_{k,m}^0(x) = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

обратим в нуль $\mathrm{L}_\eta Y_k^0(N_1)$. Начальное условие для (11) находим из соотношения:

$$\tilde{\omega}_{k,m}^0(x)\, B(x,t)|_{x_l = l-1} = -\, c_k(x,t)|_{x_l = l-1}, \quad l = 1,2.$$

В дальнейших шагах, аналогичным образом, обращаем в нуль и $\mathrm{L}_\xi Z_0(N_2)$. Функции $c_{k,1}(x,t), v_0(x,t)$ определяем из (9) и (7).

Этим полностью определен главный член асимптотики:

$$u_0(M) = v_0\ (x,t) + \sum_{m=1}^{4} d_m^0(\,x,t) I_m(\xi,t).$$

Соотношения (9) удовлетворяется, при этом

$$c_{k,1}(x,t) = \frac{1}{i\theta_k'(t)} f_k(x,t)\exp\left(\frac{i\theta_k'(t)}{\varepsilon}\right),$$

тогда правая часть примет вид

$$F_2(M) = -i\sum_{k=1}^{m}\theta_k'(t)\sum_{l=1}^{2}\left[Y_{l,k}^1(N_l)\right].$$

Итерационное уравнение при k=2 с такой правой частью разрешимо в U и его решения представимо в виде (8) с индексом 2 вместо 0, если функция $Y_k^2(N_1)$ - решения уравнения

$$T_1^1 Y_k^2(N_1) = i\theta_k'(t) Y_k^1(N_1)$$

По аналогии [3], используя тождество (4), легко устанавливается, что построенное решение при $\theta = \psi(x,t,\varepsilon)$ является асимптотическим решением задачи (1). Справедлива теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда частичная сумма (7) при $\theta = \psi(x,t,\varepsilon)$ и достаточно малых ε>0 является асимптотическим решением задачи (1), т.е. справедлива оценка

$$|u(x,t,\varepsilon) - u_{n,\varepsilon}(x,t,\psi(x,t,\varepsilon))| < c\,\varepsilon^{n+1}$$

для *n=0,1,2,…*

Литература:

1. Омуралиев А.С., Шейшенова Ш.К. Асимптотика решения параболической задачи при отсутствии спектра предельного оператора и с быстроосциллирующей правой частью. Исслед. по интегро-диффер. уравн. Выпуск 42. - 2010.
2. Омуралиев А.С., Шейшенова Ш.К. Асимптотика решения задачи с угловым параболическим пограничным слоем и осциллирующей правой частью// Материалы Междунар.научно-практ.конфер. 2 часть. Талдыкорган 2010. - С. 192-195.
3. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. - Бишкек: ИЦ "Текник" КТУ. - 2005.-152 с.
4. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.2001. - С. 576.

Рецензент: к.ф.-м. н., доцент Нарматова М.Ж.