*Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.*

# ИМПУЛЬСТУК БАШКАРУУ, СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕТТИК МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

*Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.*

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*Zh.K. Kakishov, B.A. Sadykova*

# ASYMPTOTIC SOLVING OF BOUNDARY EQUATION FOR SINGULAR PERTURBED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE CONTROL

*УДК: 517.9*

*Импульстук башкаруу, сызыктуу эмес сингулярдык дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн асимптотикалык формуласынын чыгарылышы түзүлдү.* (0,1) *ачык кесиндисинде* $\varepsilon \to 0$ *учурда импульстук, сингулярдык-дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн четтик маселенин чыгарылышынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынды.*

***Негизги сөздөр:*** *асимптотика, четтик маселе, импульс, башкаруу, Хевисайддын тепкичтүү функциясы, Дирактын импульстук дельта-функциясы, биринчи түрдөгү үзүлүү, кичине параметр.*

*Построены асимптотические формулы для нелинейных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным управлением. Получены достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным управлением при* $\varepsilon \to 0$ *на открытом отрезке* (0,1).

***Ключевые слова:*** *асимптотика, краевая задача, импульс, управление, ступенчатая функция Хевисайда, импульсная дельта-функция Дирака, разрыв первого рода, малый параметр.*

*Asymptotic formulas for nonlinear singularly perturbed differential equations with impulse control were developed. Have been received enough conditions of existence and singularity of perturbed equations for singular perturbed differential equations with impulse control under* $\varepsilon \to 0$ *when on the segment* (0,1).

***Key words:*** *asymptotic boundary equation, impulse, control, Hevisayd's step function, impulse Dirac's delta function, the first kind of gap, a small parameter.*

Рассмотрим нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вида:

$$\varepsilon y' = f_0(x,y) + \theta(p_1) f_1(x,y) + \varepsilon A_1 \delta(p_1), (0 \le x \le 1), \quad (0 < x_1 < 1) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = b_1, \tag{$1_0$}$$

$$y(1) = b_2, \tag{$1_1$}$$

где $0 < \varepsilon < 1, b_1, b_2, 0 < x_1 < 1$ - заданные постоянные, $A_1$ - искомое число (управление). $f_0(x,y)$, $f_1(x,y)$ - дважды непрерывно-дифференцируемые функции и ее производные ограничены, $p_1 = x - x_1$, $\theta(p_1)$ - функция Хевисайда, $\theta(+0) = 1, \theta(0) = 0$, $\theta'(p_1) = \delta(p_1)$ - дельта-функция Дирака,

$$\delta(p_1) = \begin{cases} 0, x \ne x_1 \\ \infty, x = x_1 \end{cases}, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p_1) dx = 1.$$

Формально полагая $\varepsilon = 0$ из (1) получим:

$$f_0(x,v) + \theta(p_1) f_1(x,v) = 0. \tag{2}$$

Решение этого функционального алгебраического уравнения будем искать в виде:

$$v(x) = v_0(x) + \theta(p_1) v_1(x), \tag{$2_0$}$$

где $v_0(x)$, $v_1(x)$ - неизвестные непрерывные функции. Подставляя ($2_0$) в (2) получим:

$$f_0(x, v_0 + \theta(p_1) v_1(x)) + \theta(p_1) f_1(x, v_0 + \theta(p_1) v_1(x)) = 0.$$

Неизвестные функции $v_0(x)$, $v_1(x)$ соответственно удовлетворяют решением следующей цепочке нелинейных функциональных алгебраических уравнений в соответствующих отрезках:

$$f_0(x, v_0(x)) = 0, (0 \le x \le 1), \tag{2₁}$$

$$f_0(x, v_0(x) + v_1(x)) + f_1(x, v_0 + v_1(x)) = 0, (x_1 \le x \le 1). \tag{2₂}$$

По правилам обобщенного дифференцирования кусочно-регулярных функций получим:

$$y'(x) = \left[y'(x)\right] + \left(y(x_1+0) - y(x_1-0)\right)\delta(x - x_1), \tag{2₃}$$

где $y'(x)$ - обозначена обобщенная производная, а через $\left[y'\right]$ - обычная производная определенная для любого $x \ne x_1$.

Так как

$$\varepsilon\left[y'\right] = f_0(x, y) + \theta(p_1) f_1(x, y), x \ne x_1, (0 \le x \le 1) \tag{2₄}$$

при $x = x_1$

$$\varepsilon y' + \varepsilon\left(y(x_1+0) - y(x_1-0)\right)\delta(p_1) = f_0(x, y) + \theta(p_1) f_1(x, y) + \varepsilon A_1 \delta(p_1). \tag{2₅}$$

Определим неизвестную постоянную

$$A_1 = y(x_1+0) - y(x_1-0). \tag{2₆}$$

Тогда уравнение ($2_5$) запишется в виде ($2_4$) с краевыми условиями

$$y(0) = b_1, y(1) = b_2. \tag{2₇}$$

**Теорема.** При выполнении условий

1) $f'_{0y}(x, y) \le -\alpha_0$; 2) $f'_{0y}(x, y) + f'_{1y}(x, y) > \left(\alpha_0 + \alpha_1\right), (\alpha_0, \alpha_1 = const > 0)$, краевая задача ($2_4$), ($2_7$) имеет единственное решение представимое в виде

$$\begin{aligned} y(x,\varepsilon) = v_0(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) + \theta(p_1)(v_0(x) + v_1(x) + \Pi_1(\tau_1) + \varepsilon\xi_1(x,\varepsilon) - \\ - v_0(x) - \Pi_0(\tau) - \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon)), \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $v_0(x)$, $v_1(x)$ соответственно удовлетворяют системе ($2_1$), ($2_2$), а функций $\Pi_0(\tau)$, $\Pi_1(\tau_1)$ удовлетворяют условиям $\left|\Pi_0(\tau)\right| \le C_0 e^{-\alpha_0 \tau}, \left|\Pi_1(\tau_1)\right| \le C_1 e^{-(\alpha_0+\alpha_1)\tau_1}, \tau = \dfrac{x}{\varepsilon}, \tau_1 = \dfrac{1-x}{\varepsilon},$ соответственно, функции $\xi_0(x,\varepsilon)$ и $\xi_1(x,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям $\left|\xi_0(x,\varepsilon)\right| \le C_{00}$ и $\left|\xi_{10}\right| \le C_{10}$, неизвестная постоянная $\left|A_1 - v_1(x_1)\right| \le C\varepsilon$.

Доказательство. Нелинейное дифференциальное уравнение ($2_4$) с начальным условием ($1_0$) на отрезке $\left[0, x_1\right)$ приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\varepsilon y' = f_0(x, y), (0 < x < x_1) \\ &y(0) = b_1. \end{aligned} \tag{1₀}$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения ищем в виде:

$$y(x,\varepsilon) = v_0(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) \tag{3₀}$$

с начальными условиями

$$\Pi_0(0) = b_1 - v_0(0), \xi_0(0,\varepsilon) = 0. \tag{3₁}$$

Подставляя ($3_0$) в (3) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon v'_0 + \dot{\Pi}_0 + \varepsilon^2 \xi'_0 = f_0(x, v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0) = f_0(0, v_0(0) + \Pi_0) + \left[f_0(x, v_0 + \Pi_0) - f_0(0, v_0(0) + \Pi_0)\right] + \\ + \left[f_0(x, v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0) - f_0(x, v_0 + \Pi_0\right]. \end{aligned}$$

Определим неизвестные функции $\left[\Pi_0, \xi_0\right]$ в виде:

$$\Pi_0(0) = b_1 - v_0(0), \dot{\Pi}_0(\tau) = f_0(0, v_0(0) + \Pi_0). \tag{3₂}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + f_{00}(x,\xi_0,\varepsilon_0),\\ &\xi_0(0,\varepsilon) = 0,\end{aligned} \tag{$3_3$}$$

где

$$g_0(x,\varepsilon) = -v_0' + \frac{1}{\varepsilon}\left[f_0(x, v_0 + \Pi_0) - f_0(0, v_0(0) + \Pi_0)\right].$$

$$f_{00}(x,\xi_0,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left[f_0(x, v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0) - f_0(x, v_0 + \Pi_0)\right], f_{00}(x,0,\varepsilon) = 0.$$

Имеет место оценки

$\left|g_0(x,\varepsilon)\right| \le C_0 + C_0\dfrac{|x|}{\varepsilon}\left|\Pi_0\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\right| \le C_0$ ограничение константой, не зависит от $\varepsilon$.

Имеем также:

$$f_{00\xi}'(x,\xi_0,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} f_{0\xi}'(x, v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0)\varepsilon \le -\alpha_0 = const > 0.$$

Следовательно, решение ($3_3$) равномерно ограничено по $\varepsilon$, причем при $\varepsilon \to 0$ решение ($3_0$) сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения ($2_1$) на открытом отрезке $(0, x_1)$.

Рассмотрим с обратным временем нелинейное дифференциальное уравнение ($2_4$) с начальным условием ($1_1$) на отрезке $\left(x_1, 1\right]$.

$$\begin{aligned}&\varepsilon y' = f_0(x,y) + f_1(x,y), (x_1 < x < 1)\\ &y(1) = b_2.\end{aligned} \tag{$3_4$}$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения ($3_4$) будем искать в виде:

$$y(x,\varepsilon) = v_0(x) + v_1(x) + \Pi_1\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_1(x,\varepsilon), \tag{$3_5$}$$

где $\Pi_1, \xi_1$ - пока неизвестные функции. Подставляя ($3_5$) в ($1_1$) получим:

$b_2 = v_0(1) + v_1(1) + \Pi_1\left(0\right) + \varepsilon\xi_1(1,\varepsilon).$

Определим начальные условия для $\Pi_1(0), \xi_1(1,\varepsilon)$

$$\Pi_1(0) = b_2 - v_0(1) - v_1(1), \tag{$3_6$}$$

$$\xi_1(1,\varepsilon) = 0. \tag{$3_7$}$$

Подставляя ($3_5$) в ($3_4$) получим:

$$\begin{aligned}&\varepsilon(v_0' + v_1') - \dot{\Pi}_1 + \varepsilon^2\xi_1' = \sum_{k=0}^{1} f_k(x, v_0 + v_1 + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1) = \sum_{k=0}^{1} f_k(1, v_0(1) + v_1(1) + \Pi_1) +\\ &+\sum_{k=0}^{1}[f_k(x, v_0(x) + v_1(x) + \Pi_1) - f_k(1, v_0(1) + v_1(1) + \Pi_1)] + \sum_{k=0}^{1}[f_k(x, v_0 + v_1 + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1) -\\ &- f_k(x, v_0 + v_1 + \Pi_1)].\end{aligned} \tag{$3_8$}$$

Определим неизвестные функции $\left[\Pi_1, \xi_1\right]$ в виде:

$$\begin{aligned}&-\dot{\Pi}_1(\tau_1) = \sum_{k=0}^{1} f_k(1, v_0(1) + v_1(1) + \Pi_1),\\ &\Pi_1(0) = b_2 - v_0(1) - v_1(1).\end{aligned} \tag{4}$$

Имеет место оценки:

$$\left|\Pi_1(\tau_1)\right| \le C_1 e^{-(\alpha_0+\alpha_1)\tau_1}, \left|b_2 - v_0(1) - v_1(1)\right| \le C_1 = const.$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon\xi_1' = g_1(x,\varepsilon) + f_{10}(x,\xi_1,\varepsilon), \\ &\xi_1(1,\varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{4_0}$$

где

$$g_1(x,\varepsilon) = -\left(v_0' + v_1(x)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{1}[f_k(x, v_0(x) + v_1(x) + \Pi_1) - f_k(1, v_0(1) + v_1(1) + \Pi_1)],$$

$$f_{10}(x,\xi_1,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{1}[f_k(x, v_0 + v_1 + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1) - f_k(x, v_0 + v_1 + \Pi_1)], f_{10}(x,0,\varepsilon) = 0.$$

Имеет оценку

$$\left|g_1(x,\varepsilon)\right| \le C_1 + C_1\frac{|1-x|}{\varepsilon}\left|\Pi_1\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right| \le C_1 = const > 0.$$

Также

$$f_{10\xi_1}'(x,\xi_1,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{1} f_{k\xi_1}'(x, v_0 + v_1 + \Pi_1 + \varepsilon\xi_0)\varepsilon \le (\alpha_0 + \alpha_1).$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения ($3_4$) имеет единственное решение представимое в виде:

$$y(x,\varepsilon) = v_0(x) + v_1(x) + \Pi_1\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_1(x,\varepsilon),$$

где $\Pi_1$ - функция типа пограничного слоя, в точке $x = 1$. $\left|\xi_1\right|$ - равномерно ограничено по $\varepsilon$, причем при $\varepsilon \to 0$ это решение сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения ($2_2$) на открытом отрезке $\left(x_1, 1\right)$.

Подставляя ($3_5$), ($3_0$) в ($2_6$) определим неизвестную постоянную

$$A_1 = v_0(x_1) + v_1(x_1) + \Pi_1\left(\frac{1-x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_1(x_1,\varepsilon) - v_0(x_1) - \Pi_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_0(x_1,\varepsilon).$$

$$\left|A_1 - v_1(x_1)\right| \le \left|\Pi_1\left(\frac{1-x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_1(x_1,\varepsilon) - \Pi_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \varepsilon\xi_0(x_1,\varepsilon)\right|.$$

Таким образом, совершается доказательство теоремы.

**Литература:**


1. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Бишкек, 2012. - С. 15.


**Рецензент: д.ф.-м.н., доцент Темиров Б.К.**