Карасаев И.К.

СХОДИМОСТЬ РЯДА БЕСКОНЕЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Карасаев И.К.

ЧЕКСИЗ АНЫКТАГЫЧТАРДЫН КАТАРЫНЫН ЖЫЙНАЛЫШЫ

I.K. Karasaev

CONVERGENCE OF CONTINUED DETERMINANTS' ROW

УДК: 517.956 (575.2)

Чексиз нормалдык аныктагычтардын катарын жана ал катардын жыйналуучунун жетиштүү шартын далилдөө.
Негизги сөздөр: *чексиз аныктагыч, нормалдык аныктагыч, жыйналуучулук.*

Построение бесконечной последовательности нормальных определителей и доказательство ряда, составленного из данной последовательности.
Ключевые слова: *последовательность, бесконечный определитель, ряд, абсолютная сходимость.*

Continued sequence's construction of determinants and proof of power series, made up of this sequence.

Введение

Составляется ряд из бесконечных определителей и доказывается абсолютная сходимость данного ряда.

Рассмотрим бесконечную последовательность бесконечных определителей

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{-3+2}}{3^2} & \frac{a_{-3+1}}{3^2} & \frac{a_{-3+0}}{3^2} & \frac{a_{-3-1}}{3^2} & \frac{a_{-3-2}}{3^2} & \frac{a_{-3-3}}{3^2} & \frac{a_{-3-4}}{3^2} \\ \frac{a_{-2+3}}{2^2} & 1 & \frac{a_{-2+1}}{2^2} & \frac{a_{-2+0}}{2^2} & \frac{a_{-2-1}}{2^2} & \frac{a_{-2-2}}{2^2} & \frac{a_{-2-3}}{2^2} & \frac{a_{-2-4}}{2^2} \\ \frac{a_{-1+3}}{1^2} & \frac{a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}p} & \frac{a_{-1-1}}{1^2} & \frac{a_{-1-2}}{1^2} & \frac{a_{-1-3}}{1^2} & \frac{a_{-1-4}}{1^2} \\ a_{0+3} & a_{0+2} & \frac{1}{\sqrt{2}p} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}p} & a_{0-2} & a_{0-3} & a_{0-4} \\ \frac{a_{1+3}}{1^2} & \frac{a_{1+2}}{1^2} & \frac{a_{1+1}}{1^2} & \frac{1}{\sqrt{2}p} & 1 & \frac{a_{1-2}}{1^2} & \frac{a_{1-3}}{1^2} & \frac{a_{1-4}}{1^2} \\ \frac{a_{2+3}}{2^2} & \frac{a_{2+2}}{2^2} & \frac{a_{2+1}}{2^2} & \frac{a_{2+0}}{2^2} & \frac{a_{2-1}}{2^2} & 1 & \frac{a_{2-3}}{2^2} & \frac{a_{2-4}}{2^2} \\ \frac{a_{3+3}}{3^2} & \frac{a_{3+2}}{3^2} & \frac{a_{3+1}}{3^2} & \frac{a_{3+0}}{3^2} & \frac{a_{3-1}}{3^2} & \frac{a_{3-2}}{3^2} & 1 & \frac{a_{3-4}}{3^2} \\ \frac{a_{4+3}}{4^2} & \frac{a_{4+2}}{4^2} & \frac{a_{4+1}}{4^2} & \frac{a_{4+0}}{4^2} & \frac{a_{4-1}}{4^2} & \frac{a_{4-2}}{4^2} & \frac{a_{4-3}}{4^2} & 1 \end{vmatrix} \quad (p = ..., -2, -1, 1, 2, ..) \qquad (1),$$

$$a_p = O\left(\frac{1}{p}\right), \mathrm{p} \neq 0.$$

Теорема 1. При любом p каждый из определителей Δ_p (1) имеет нормальную форму [1].

Применить теорему Коха [2] невозможно, т.к. на диагонали присутствует 0. Здесь мы используем определение нормальной матрицы (определитель). Складывая по строкам, а затем по столбцам получаем [1]

$$\Delta_p = \left[2S\left(... + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{1^2} + ... + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} \right) + \left(\frac{4}{\sqrt{2}p} - a_1 - 2a_{-1}2 \right) \right] = \frac{2S}{\sqrt{2}p} + 2(a_{-1} - a_{-1}).[3]$$

Таким образом, при любом p, бесконечный определитель Δ_p имеет нормальную форму.

Теорема 2. Ряд бесконечных, нормальных определителей (1) сходится абсолютно.

Доказательство. Рассмотрим бесконечную последовательность бесконечных нормальных определителей, каждый из которых имеет порядок $2N+1$

$$\Delta_p^N = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{-2+1}}{2^2} & \frac{a_{-2+0}}{2^2} & \frac{a_{-2-1}}{2^2} & \frac{a_{-2-2}}{2^2} \\ -\frac{a_{-1+2}}{1^2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}p} & -\frac{a_{-1-1}}{2^2} & -\frac{a_{-1-2}}{2^2} \\ a_{0+2} & \frac{1}{\sqrt{2}p} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}p} & a_{0-2} \\ \frac{a_{1+2}}{1^2} & \frac{a_{1+1}}{1^2} & \frac{1}{\sqrt{2}p} & 1 & \frac{a_{1-2}}{1^2} \\ \frac{a_{2+2}}{2^2} & \frac{a_{2+1}}{2^2} & \frac{a_{2+0}}{2^2} & \frac{a_{2-1}}{2^2} & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1.1....1.0.1...1.1.1}_{2N+1} + \underbrace{1.1...1}_{N+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}p} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}p} \underbrace{1\cdot 1.1...1}_{N-1} +$$

$$+\underbrace{1.1...1}_{N+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}p} \frac{1}{\sqrt{2}p} \cdot \underbrace{1\cdot 1...1}_{N-1} + \frac{1}{(N!)^4} \sum_{\substack{p,q=-N \\ q\notin\Omega_N}}^{N} a_{p-q}. \qquad (2)$$

Следствие. Имеет место равенство

$$\Delta_p = \frac{1}{p^2} \quad (p = ..., -2, -1, 1, 2, ...)$$

Для последовательности

$$-N, -(N-1), ..., -2, -1, 1, 2, ...N-1, N, \qquad (*)$$

множество всех перестановок из чисел (*) будет всего (2N)!, которые имеют вид

$$q_{-N}, q_{-(N-1)}, ..., q_{-1}, q_1, q_2, ..., \mathrm{q}_N . \qquad (**)$$

Множество всех перестановок будет всего (2N)!. Когда p пробежит один раз (*), q пробежит перестановки (**) (2N)! раза.

Переходя к пределу в (2), имеем

$$\Delta = \lim_{N\to\infty} = \Delta_p^N = \lim_{N\to\infty} \sum_{p=-N}^{N} \Delta_p{}^N = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... = \frac{\pi^2}{3}. \qquad [3].$$

$N\to\infty$

Литература:

1. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Одесса,1922. –393 с.
2. Koch H. Sur les determinants et les equations differentielles linear // Acta Math. - V. XVI. 1982.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз.1962.– 1100 с.

Рецензент: профессор Искандаров С.