Карасаев И.К.

КАРАСАЕВДИН ФОРМУЛАСЫ

Карасаев И.К.

ФОРМУЛА КАРАСАЕВА

I.K. Karasaev

FORMULA OF KARASAEV

УДК: 517.956 (575.2)

Локалдык формадагы чексиз аныктагычты так эсептөө формуласы. Бул аныктагычдын мааниси мүнөздүк теңдемени чыгарууга жардам берет.

Негизги сөздөр: *мүнөздүк теңдеме, Ляпуновдун кичи көрсөткүчү, мүнөздөөчү көрсөткүч.*

Дается точное вычисление бесконечного определителя локальной формы.

Ключевые слова: *характеристическое уравнение, младший показатель Ляпунова, характеристический показатель.*

It is given continued determinant's precise calculation of local form.

Key words: *characteristic equation, Lyapunov's younger index, characteristic index.*

Введение

Точное вычисление показателя Ляпунова требует точного значения бесконечного определителя локальной формы. Точность данного определителя позволяет определить спектр показателя Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1. Имеет место равенство

$$d(0)=\begin{vmatrix} \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \dots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \dots \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{vmatrix}=2a_{-1}a_{1}. \qquad (1)$$

Для доказательства рассмотрим усеченный определитель *(2N+1)* порядка определителя (1). Развернем данный определитель по определению. Пусть номер строки *p* пробежит последовательность значений

$$-N,\ -(N-1),\ \dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ N-1,\ N, \qquad (*)$$

а номер столбца *q* пробежит всевозможные перестановки.

$$q_{-N}, q_{-(N-1)}, \dots, q_{-1}, q_0, q_1, \dots, q_{N-1}, q_N$$

Множество таких перестановок равно (*2N+1)!.* Очевидно, что произведение диагональных элементов равна нулю.

Вначале покажем, что нет элементов, кроме

$$a_{0-1}, a_{1-0}, a_{-1-0}, a_{0+1},$$

которые в сочетании с диагональными элементами, т.е. давали бы соответствующие слагаемые (члены) определителя *d(0).* Члены определителя, в образовании которых присутствуют 1, будут

$$\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{N-1}\cdots(-a_{-1+0})\cdot(-a_{0+1})\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{N}, \qquad (*)$$

$$\underbrace{1\cdot 1\cdots 1)}_{N}\cdot(-a_{1-0})\cdot(-a_{0-1})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{N-1} \qquad (**)$$

где в $(**)$ число 1 всего *(2N-1),* а вместе с a_{-1-0}, a_{0+1} произведение содержит всего (*2N+1*) элементов, т.е. законный член определителя. То же самое можно сказать и относительно второго произведения. Легко заметить, что первые индексы в порядке возрастания (*), а вторые индексы образуют всевозможные перестановку из (*) элементов по 2N+1 элементов, которых всего будут $(2N+1)!$ Множество таких перестановок

$$q = q_{-N}, q_{-(N-1)}, \cdots, q_{-2}, q_{-1}, q_0, q_0, q_1, q_2, \cdots, q_{N-1}, q_N \qquad (***)$$

обозначим Ω_N.

(***)* принимает вид

$$\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdots 1}_{N}\cdot a_1 a_{-1}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{N-1} = a_{-1}a_1.$$

$$\underbrace{1\cdot 1\cdot\cdot 1}_{N-1}\cdot(-a_{-1-0})\cdot(-a_{0+1})\cdots\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdots 1}_{N} = a_{-1}a_1$$

где всего $(2N+1)$элементов. Сумма распространяется на (2N+1)! слагаемых и, заметим, что $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\ n \neq 0$.

Пусть, $a_{i-j} = a_{ij}$ элемент, отличный от $a_{0-1}, a_{1-0}, a_{-1-0}, a_{0+1}$. Тогда *i*-я строка, пересекаясь с диагональю и «заметает» одну 1, в то же время *j*-й столбец, на другом конце пересекаясь с той же диагональю «заметает» еще одну 1. Таким образом, данный элемент, a_{ij} находясь на пересечении *i*-ой строки и *j*-ого столбца «заметает» две 1. Всего 1 на диагонали будут *2N-2*, с $a_{i-j} = a_{ij}$ образуют произведение

$$\underbrace{1\cdot 1\ldots 1}_{N-1}\cdot a_{ij}\cdot\underbrace{1\cdot 1\ldots 1}_{N-1},$$

состоящее из *2N-1* элементов, которое не дает члена определителя, так как число элементов, взятых по одному и только по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца должно равняться *2N+1*-порядку определителя.

Далее, если мы возьмем два элемента, отличных от a_{ij} то они будут «заметать» четыре 1. Тогда эти два элемента вместе с оставшимися единицами дает произведение, состоящее из *2N-2* элемента, которые не равно порядку определителя и т. д.

Тогда по определению определителя порядка *2N+1,* имеем

$$d^{2N+1}(0) = \underbrace{1\cdot 1\cdots 1\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdots 1}_{2N+1} + \underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{N-1}\cdot(-a_{1+0})(-a_{0+1})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{N} +$$

$$+\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{N}\cdot(-a_{0-1})\cdot(-a_{1-0})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{N-1} + \frac{1}{(N!)^4}\sum_{q\in\Omega_N}\prod_{\substack{p=-N\\ q\neq p}}^{N} a_{p-q}$$

Кроме того легко заметить, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(N!)^4}\prod_{\substack{p,q=-N\\ p\neq q}}^{N} a_{p-q} = 0. \qquad (*)$$

Таким образом, переходя к пределу при $N\to\infty$, с учетом (*), получаем

$$d(0) = 2a_{-1}a_1.$$

где $\omega_N = (q_{-N},\ldots,q_{-2},q_{-1},q_0,q_1,q_2,\ldots,q_N)$ - есть множество всех перестановок из *2N+1* чисел по *2N+1.* Сумма распространяется на все перестановки (***).

Данный метод [1] позволяет, определить показателей Ляпунова с точностью до 10^{-10} и точно построить фундаментальную систему неполной динамической системы, описываемой линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с периодическими коэффициентами.

Формула (1) называется **формулой Карасаева.**

Английский астроном и математик Хилл (1877г.), исследуя движения Луны вокруг Земли, в своем мемуаре получил уравнение, которое содержит бесконечный определитель [2]. Он не мог вычислить и в качестве приближенного значения этого определителя берет

$$
\begin{aligned}
D(0) = {} & 1 + \frac{\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{4\sqrt{\theta_0}}\left[\frac{\theta_1 2}{1-\theta_0} + \frac{\theta_2 2}{4-\theta_0} + \frac{\theta_n 2}{\theta-\theta_0}\right] + + \frac{\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{82\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^2} \times \\
& \times\left[\frac{\pi\, ctg\left(\pi\sqrt{\theta_0}\right)}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)}\right]\theta_1^4 + \frac{8\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{8\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)}\theta_1^2\theta_2 + \\
& + \frac{\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{128\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^3}\left\{\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)}\right]\frac{\pi\, ctg\left(\pi\sqrt{\theta_0}\right)}{\sqrt{\theta_0}}\frac{25}{80_0} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \\ &\quad + \frac{4}{(1-\theta_0)^2} - \frac{9}{8(4-\theta_0)} + \frac{9}{(4-\theta_0)^2} - \frac{4}{9-\theta_0} - \frac{\pi^2}{8\theta_0}\end{aligned}\right\}\theta_1^6 + \\
& + \frac{3\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{82\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^2(4-\theta_0)}\left[\frac{\pi\, ctg\left(\pi\sqrt{\theta_0}\right)}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{20}{3(9-\theta_0)}\right]\theta_1^4\theta_2 + \\
& + \frac{\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{16\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)}\left[\frac{\pi\, ctg\left(\pi\sqrt{\theta_0}\right)}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{10}{9-\theta_0}\right]\theta_1^2\theta_2^2 + \\
& + \frac{(7-3\theta_0)\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{4\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)(9-\theta_0)}\theta_1\theta_2\theta_3 + \frac{5\pi\, ctg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{16\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)(9-\theta_0)}\theta_1^2\theta_2.
\end{aligned}
$$

Этот результат в свое время казался значительным, благодаря искусству Хилла, но был далек от решения проблемы Хилла. В своей задаче вместо бесконечного определителя он брал лишь три центральные строки и три центральные столбцы

$$
\begin{vmatrix} 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} \\ a_{0+1} & 0 & a_{0-1} \\ \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 \end{vmatrix} = \left(a^2{}_1 a_{-2} + a_2 a_{-1}{}^2\right) + 2a_{-1}a_1 \qquad (2)
$$

При вычислении своего бесконечного определителя Хилл, поступая так, допустил погрешность на величину

$$a^2{}_1 a_{-2} + a_2 a_{-1}^2 .$$

Он вместо истинного значения определителя имел дело с избытком или с недостатком для данного бесконечного определителя.

Метод поляризации позволяет точно вычислять показателей Ляпунова и построить фундаментальную систему решений в представлении Флоке и положить конец всевозможным приближенным оценкам, громоздким критериям устойчивости.

Литература:

1. Карасаев И. К. Сравнение метода Ляпунова и метода поляризации // Естественные и математические науки в современном мире. Изд-во: НП СИБАК. - Новосибирск, 2014. №16.С.16-25.
2. Hill G.W. On the part of the motion of the Lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and the moon // Acta Math.VIII. - 1886. 36 p.

Рецензент: профессор Керимбеков А.