ФИЗИКА
ФИЗИКА
PHYSICS

Наджмиддинов А.М., Шаршеев К., Джураев Д.С., Мамытбеков У.К.

БЕТТИК ЧӨЙРӨДӨ ЖЫЛУУЛУКТУН СТАЦИОНАРДЫК ТАРАЛЫШЫ

Наджмиддинов А.М., Шаршеев К., Джураев Д.С., Мамытбеков У.К.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПЛОСКОЙ СРЕДЕ

A.M. Najmiddinov, K. Sharsheev, D.S. Juraev, U.K. Mamytbekov

STATIONARY DISTRIBUTION HEAT IN FLAT MEDIUM

УДК: 538.9

Рассмотрено создание математической модели стационарных тепловых процессов в конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик.
Ключевые слова: *Стационарное, тепло, поток, среда, модель, процесс, температура, распространение.*

We consider the creation of mathematical models of stationary thermal processes in condensed matter, taking into account the regularization of the heat flux and temperature dependence of the thermal characteristics.
Key words: *Stationary, heat flux environment model, a process temperature distribution.*

Целью настоящей работы является исследование процесса распространения тепла в среде плоской геометрической формы. В качестве плоскости, в которой происходит распространение тепла, используем фазовую плоскость (q,T). Как было показано в [1], при выполнении условия $\mu = 0$ сосуд, в котором заключена среда, имеет плоскую форму. В этом случае уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{q}{\lambda} - \eta_1 T, \\ \dfrac{dq}{dx} = \varphi(T) - \eta_2 q, \end{cases}$$

принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{q}{\lambda} + \dfrac{T}{x+\varepsilon+1}, \\ \dfrac{dq}{dx} = \varphi(T) - \dfrac{q}{x+\varepsilon+1}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\eta_1 = -\dfrac{1}{x+\varepsilon+1}$ и $\eta_2 = \dfrac{1}{x+\varepsilon+1}$ – общее число компонентов, а ε малый параметр $(0 \le \varepsilon << 1)$.

Как показано в [1] в окрестности точки равновесия, то есть особой точки $(q(x_*),T(x_*))$ происходит фазовое превращение - либо в среде происходит взрыв, либо горение прекращается. В частности, в окрестности этой точки возникает необходимость в управлении процессом горения.

Рассмотрим процесс распространения тепла в положительную половину плоскости переменных (q,T), так как параметры поверхности одинаковы. Поэтому граничные условия для температуры и плотности теплового потока можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad и \quad q\big|_{x=0} = 0; \\ &-\lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=h} = \alpha(T_1 - T_2) \quad и \quad q\big|_{x=h} = \alpha(T_1 - T_2), \end{aligned} \qquad (2)$$

где T_1 и T_2 соответственно, температура в начале и конце образца, а α – коэффициент теплоотдачи $\left(\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{с})\right)$; h – длина образца (м.).

Из этих граничных условий следует, что в точке $x=0$ температура среды отлична от нуля и постоянна, поэтому $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=0$ и тепловой поток отсутствует. В точке $x=h$ изменение температуры в зависимости от изменения координаты x пропорционально разности температур в точках $x=0$ и $x=h$, и, следовательно, плотность теплового потока q также пропорциональна разности температур на границах среды.

Из физического смысла постановленной задачи следует, что характер решения и условие его существования зависят лишь от параметров $x,\ \varepsilon$. Естественно ожидать, что при малых x и $\varepsilon\equiv 0$, когда велик тепловой поток в плоской среде, решение системы уравнений (1) существует, а при больших x и $\varepsilon\equiv 0$, эти уравнения не имеют решения. Таким образом, существуют критические значения $x_{кр}$ и $\varepsilon_{кр}$, разделяющие области существования и отсутствия решения системы уравнения (1). Конкретные значения $x_{кр}$ и $\varepsilon_{кр}$ можно найти в результате полного решения системы уравнения (1) при выполнении условий (2). Ниже будет исследован теплообмен между элементами исследуемой системы и окружающей средой для различных видов функции $\varphi(T)$.

Предположим, что теплообмен между исследуемой системой и окружающей средой постоянен, то есть $\varphi(T_0)=\alpha_1 T_0-\alpha_2 T_0^3$, где T_0 значение температуры в точке $x=0$.

В этом случае решение системы уравнение (1) можно искать в виде:

$$\begin{aligned} T(x,\varepsilon)&=T_{11}(x,\varepsilon)+\omega_1 T_{22}(x,\varepsilon),\\ q(x,\varepsilon)&=q_1(x,\varepsilon)+\omega_2 q_2(x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

где ω_1 и ω_2 неизвестные постоянные, подлежащие определению. Следовательно, система уравнений (1) распадаются на две независимые системы уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{11}}{dx}=-\dfrac{q_1}{\lambda}+\dfrac{T_{11}}{x+\varepsilon+1},\\ \dfrac{dq_1}{dx}=\varphi(T_0)-\dfrac{q_1}{x+\varepsilon+1}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{22}}{dx}=-\dfrac{q_2}{\lambda}+\dfrac{T_{22}}{x+\varepsilon+1},\\ \dfrac{dq_2}{dx}=-\dfrac{q_2}{x+\varepsilon+1}, \end{cases} \tag{5}$$

Тогда граничные условия (2) для этих систем уравнений принимают вид:

$$\left.\frac{dT_{11}}{dx}\right|_{x=0}=0 \quad и \quad q_1\big|_{x=0}=0, \tag{6}$$

$$-\lambda\left.\frac{dT_{22}}{dx}\right|_{x=h}=\alpha(T_1-T_2) \quad \text{и} \quad q_2\big|_{x=h}=\alpha(T_1-T_2). \tag{7}$$

Следуя [1], определяем решение уравнения (4) при выполнении условия (6). На основе формулы

$$q=\frac{\lambda(\eta_1 kT+\varphi(T))}{\lambda\eta_2-k},$$

при $\lambda\eta_2\neq k$, плотность теплового потока q_1, определяется выражением:

$$q_1(x,\varepsilon)=\frac{\lambda(x+\varepsilon+1)(\alpha_1 T_0-\alpha_2 T_0^3)-\lambda kT}{\lambda-k(x+\varepsilon+1)}. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в первое уравнение системы (4), определим температуру T_{11}:

$$T_{11}(x,\varepsilon) = -(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3)\frac{(x+\varepsilon+1)^2}{\lambda - k(x+\varepsilon+1)} + A\frac{x+\varepsilon+1}{\lambda - k(x+\varepsilon+1)}. \qquad (9)$$

Теперь подставляя (9) в выражение (8) определим общее выражение теплового потока:

$$q_1(x,\varepsilon) = \frac{\lambda^2(x+\varepsilon+1)}{[\lambda - k(x+\varepsilon+1)]^2}(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3) - A\frac{\lambda k(x+\varepsilon+1)}{[\lambda - k(x+\varepsilon+1)]^2}. \qquad (10)$$

В выражениях (9) и (10) A и k неизвестные постоянные интегрирования, которые подлежат определению. Постоянные интегрирования A и k определяются из граничных условий (6).

Разделяем выражение (9) на $(x+\varepsilon+1)$ и выражение (10) умножаем на $-\lambda^{-1}$. Затем полученное значение плотности теплового потока и температуры T_{11} складываем между собой. В результате будем иметь:

$$\frac{dT}{dx} = -(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3)\frac{(x+\varepsilon+1(2\lambda - k(x+\varepsilon+1))}{[\lambda - k(x+\varepsilon+1)]^2} + A\frac{\lambda}{[\lambda - k(x+\varepsilon+1)]^2}. \qquad (11)$$

Применяя условия (6) к выражению (11) определим значение A в точке $x=0$:

$$A = (\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3)(\varepsilon+1)\left(2 - \frac{k}{\lambda}(\varepsilon+1)\right). \qquad (12)$$

Далее подставляя значение A в выражение (10), определим значение k в точке $x=0$:

$$k = \frac{\lambda}{\varepsilon+1}. \qquad (13)$$

С учетом этого значения k постоянная интегрирования A, то есть выражение (12), упрощается и принимает вид:

$$A = (\varepsilon+1)(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3).$$

Теперь подставляя найденные значения A и k в выражения (9) и (10) определим решение системы уравнения (4):

$$T_{11}(x,\varepsilon) = -\frac{\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3}{\lambda}(\varepsilon+1)(x+\varepsilon+1), \qquad (14)$$
$$q_1(x,\varepsilon) \equiv 0.$$

Далее используя выражения (14) определим значение температуры в точке $x=h$. Для достижения указанной цели, дифференцируем (14) по x. В результате получим:

$$-\lambda\frac{dT_{11}}{dx} = (\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3)(\varepsilon+1). \qquad (15)$$

Выражение (15) определяет значение температуры T_{11} в точке $x=h$. С другой стороны, согласно граничным условиям (2): $-\lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=h} = \alpha(T_1 - T_2)$. Из равенства левых сторон этих выражений имеем:

$$T_2 = T_1 - \frac{\varepsilon+1}{\alpha}(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3). \qquad (16)$$

Из этого выражения можно определить значение температуры T_1 в точке $x=0$:

$$T_1 = T_2 + \frac{\varepsilon+1}{\alpha}(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3).$$

Если в точке $x=0$ значение температуры T_1 равно T_0, тогда из последнего выражения в точке $x=h$ можно найти отношение $\frac{T_2}{T_0}$:

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{(\varepsilon+1)(\alpha_1 - \alpha_2 T_0^2)}{\alpha}.$$

Аналогичным способом можно найти решения системы уравнений (5) при выполнении условий (7). В качестве произвольного число k принимаем выражение вида (13). Тогда общие решения системы уравнения (5) с учетом (13) принимают вид:

$$T_{22}(x,\varepsilon) = \frac{B(x+\varepsilon+1)}{x}, \qquad q_2(x,\varepsilon) = -\frac{\lambda(x+\varepsilon+1)B}{x^2}. \tag{17}$$

Используя граничные условия (7) из выражения (17) определим значение постоянного интегрирования: $B = \frac{\lambda h^2 \alpha}{\varepsilon+1}(T_1 - T_2)$.

Выражения (14) и (17) позволяют определить значения неизвестных величин ω_1 и ω_2. Для определения значения ω_1, дифференцируем первое равенство выражений (17) по x. Далее разделяя первое выражение (17) на $(x+\varepsilon+1)$, и умножая второе выражение (17) на $(-\lambda^{-1})$ и слагая полученные результаты, будем иметь:

$$\frac{dT_{22}}{dx} = -\alpha(T_1 - T_2)\frac{\lambda h^2}{x^2}. \tag{18}$$

Теперь умножая выражение (18) на $-\lambda\omega_1$, и складывая с выражением (15) для определения значения ω_1, получим следующее равенство:

$$-\lambda \frac{dT_{11}}{dx}\bigg|_{x=h} - \lambda\omega_1 \frac{dT_{22}}{dx}\bigg|_{x=h} = -\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=h}. \tag{19}$$

Для определения значения ω_2, умножаем второе равенства выражений (17) на ω_2 и складываем со вторым выражением (14). В результате будем иметь:

$$q_1\big|_{x=h} + \omega_2 q_2\big|_{x=h} = q\big|_{x=h}. \tag{20}$$

Таким образом, из выражений (19) и (20) можно найти значение коэффициентов ω_1 и ω_2:

$$\omega_1 = 1 - \frac{\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3}{\alpha(T_1 - T_2)}(\varepsilon+1), \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon+1}{\lambda(h+\varepsilon+1)}. \tag{21}$$

Подставляя значения функций $T_{11}(x,\varepsilon)$, $T_{22}(x,\varepsilon)$, $q_1(x,\varepsilon)$ и $q_2(x,\varepsilon)$ из (14) и (17), а также значения ω_1 и ω_2 из (21), в (3) получим общее решение системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} T(x,\varepsilon) &= \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3}\frac{x+\varepsilon+1}{h+\varepsilon+1}(h-x)\Big(\alpha(T_1 - T_2) - (\varepsilon+1)(\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3)\Big) - \\ &\quad - \frac{\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3}{\lambda}(\varepsilon+1)(x+\varepsilon+1), \\ q(x,\varepsilon) &= \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h+\varepsilon+1}(x+\varepsilon+1). \end{aligned} \tag{22}$$

Для выяснения характера зависимости T и q от линейных размеров (x) образца необходимо проведение численных расчетов. При проведении численных расчетов, согласно [2], положим, что $\varphi(T) = \alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3$, где $\alpha_1 = 2500\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$ – коэффициент мощности линейного источника; $\alpha_2 = 0{,}005\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^3}$ – коэффициент мощности нелинейного источника; $\alpha = 5\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ – коэффициент теплоотдачи; $\lambda = 0,2 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ – коэффициент теплопроводности; $\text{h} = 0 \div 1$ длина образца; начальная температура $\text{T}_1 = 505,1\,\text{К}$.

На рисунке представлены результаты численных расчетов зависимостей теплового потока q и температуры T от линейных размеров среды (x), на основе выражения (22).

Как видно из рисунок а) с ростом линейных размеров тела плотность теплового потока возрастает почти линейно. Из рисунок б) следует, что с увеличением координаты тела (x), её температура уменьшается приблизительно нелинейно.

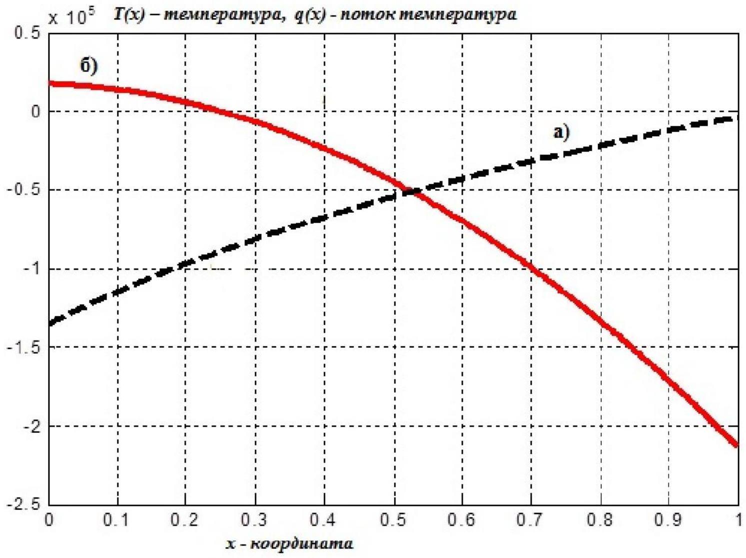

Рисунок. а) Зависимость изменения значения теплового потока q от изменения линейных размеров (x) образца; **б)** Зависимость изменения значения температуры T от изменения линейных размеров (x) образца.

Литература:

1. Джураев Х.Ш., Комилов К., Наджмиддинов А.М. Исследование зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах. / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, А.М. Наджмиддинов //Вестник таджикского национального университета. 1/1(192), -С.114-120.
2. Гришин А.М. Типы решений одной нелинейной краевой задачи и их устойчивость /Гришин А.М.// Теория функций и дифференциальные уравнения. Саратов: Изд-во Саратовский университета, 1966, -С.44-51.

Рецензент: д.ф.-м.н. Денисов Г.С.