МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Байманкулов А.Т., Жуаспаев Т.А.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРУНТА С УЧЕТОМ ВЛАГИ

A.T. Baimankulov, T.A. Zhuaspayev

IDENTIFICATION OF SOIL THERMAL CONDUCTIVITY BASED ON MOISTURE

УДК: 519.62:624.131

В работе рассматривается задача определения коэффициента теплопроводности с учетом диффузии влаги. Рекуррентная формула метода выводится на основе построения сопряженной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, сопряженная задача, начально-граничные условия.*

The paper considers the problem of determining the coefficient of thermal conductivity in view of moisture diffusion. The recurrence formula method is derived from the construction of the dual problem.

Key words: *reverse problem, conjugate problem, initial-boundary conditions.*

Постановка задачи

В области $Q=(0,H)\times(0,T)$ изучается задача

$$\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\overline{\alpha}\left(\theta-T_g(t)\right)\bigg|_{z=H}=0, \tag{2}$$

где $\overline{\alpha}=\alpha+\alpha_0 D_n(H)$.

$$\theta\bigg|_{z=0}=T_1,\ \theta\bigg|_{t=0}=\theta_0(z), \tag{3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}+D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \tag{4}$$

$$\sigma\bigg|_{z=H}=A(t),\ \sigma\bigg|_{z=0}=0,\ W\bigg|_{t=0}=W_0(z), \tag{5}$$

здесь $\sigma(z,t)=D(z)\frac{\partial W}{\partial z}+D(z)\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}$.

Используя изменение температуры грунта и влаги на поверхности земли $T_g(t)$,$W_g(t)$, требуется определить коэффициент теплопроводности $\lambda(z)$.

Итерационный метод

Задается начальное значение коэффициента теплопроводности $\lambda(z)$, соответствующее решение системы (1)-(5) обозначим через $\left(\theta_n(z,t),\ W_n(z,t)\right)$.

Следующее приближение коэффициента теплопроводности обозначим через $\lambda_{n+1}(z)$, а соответствующее решение системы (1)-(5) будет $\left(\theta_{n+1}(z,t),\ W_{n+1}(z,t)\right)$. Тогда для разности

$$\delta\theta(z,t) = \theta_{n+1}(z,t) - \theta_n(z,t),\ \delta W = W_{n+1} - W,\ \delta\lambda = \lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z)$$

получается задача:

$$\gamma_0 C \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right), \tag{6}$$

$$\lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\Bigg|_{z=H} + \overline{\alpha}\,\delta\theta\Big|_{z=H} + \alpha_0 \delta\theta\left(\theta_{n+1} - T_в\right) = 0,\ \delta\theta\Big|_{z=0} = 0,\ \delta\theta\Big|_{t=0}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \delta W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n \frac{\partial \delta W}{\partial z} + D_n \mu \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} + \delta D \frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} + \mu \delta D \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial z}\right), \tag{8}$$

$$\delta\sigma\Big|_{z=H} = 0,\ \delta\sigma\Big|_{z=0} = 0,\ \delta W\Big|_{t=0}, \tag{9}$$

где

$$\delta\sigma = D_n \frac{\partial \delta W}{\partial z} + D_n \mu \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} + \delta D \frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} + \mu \delta D \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial z}.$$

Умножим (6) на $\psi(z,t)$ и проинтегрируем по всем внутренним точкам области Q. Тогда

$$\int_0^H \gamma_0 C \int_0^T \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} \psi\, dt dz = \int_0^T dt \int_0^H \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right) \psi\, dz.$$

Интегрируя по частям, выводим, что

$$\int_0^H \gamma_0 C \delta\theta\psi \Big|_{t=0}^{t=T} dz - \int_0^H \int_0^T \gamma_0 C \delta\theta \frac{\partial \psi}{\partial t} dt dz = \int_0^T \lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} \psi \Big|_{z=0}^{z=H} dt - \int_0^T \int_0^H \lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz dt.$$

Принимая $\psi(z,T) = 0,\ \psi(0,t) = 0$, с учетом (7) после интегрирования получим соотношение

$$-\int_0^H \int_0^T \delta\theta \gamma_0 C \frac{\partial \psi}{\partial t} dt dz + \overline{\alpha} \int_0^T \left(\delta\theta\psi\right)\Big|_{z=H} dt = -\alpha_0 \int_0^T \delta D\left(\theta_{n+1} - T_в\right)\psi\Big|_{z=H} d\tau -$$

$$-\int_0^T \delta\theta\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\Big|_{z=0}^{z=H} dt + \int_0^H \int_0^T \delta\theta\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz dt.$$

Используя однородное условие $\delta\theta\Big|_{z=0} = 0,$ и группируя подобные величины, имеем равенство

$$-\int_0^H\int_0^T \delta\theta\left(\gamma_0 C\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)dzdt + \int_0^T \delta\theta\left(\alpha\psi + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Big|_{z=H} dt = -$$

$$-\alpha_0\int_0^T \delta D\left(\overset{n+1}{\theta} - T_в\right)\psi\Big|_{z=H} d\tau. \qquad (10)$$

Теперь преобразуем (8) умножив на произвольную функцию $U(z,t)$ и интегрируя по всем внутренним точкам области Q. Тогда

$$\int_0^H dz\int_0^T \frac{\partial\delta W}{\partial t}Udt = \int_0^T dt\int_0^H \frac{\partial\delta\sigma}{\partial z}Udz.$$

Полагая $U(z,t) = 0$ интегрируем по частям по z и t. Тогда с учетом (9) имеем

$$-\int_0^T\int_0^H \delta W\frac{\partial U}{\partial t}dtdz = -\int_0^T\int_0^H \frac{\partial}{\partial z}(\delta W + \mu\delta\theta)D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}dzdt -$$

$$-\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial W_{n+1}}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}dtdz - \int_0^T\int_0^H \delta D\mu\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}dtdz.$$

Еще раз применяя формулу интегрирования по частям по переменной $z,$ имеем:

$$-\int_0^H\int_0^T \delta W\frac{\partial U}{\partial t}dtdz = -\int_0^T (\delta W + \mu\delta\theta)D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\Bigg|_{z=0}^{z=H} dt +$$

$$+\int_0^T\int_0^H (\delta W + \mu\delta\theta)\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)dzdt -$$

$$-\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial W_{n+1}}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}dtdz - \int_0^T\int_0^H \mu\delta D\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}dtdz.$$

Полагая $\frac{\partial U}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = 0$ и собирая подобные величины, получаем равенство

$$-\int_0^H\int_0^T \delta W\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)dzdt -$$

$$-\int_0^H\int_0^T \delta\theta\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)dzdt + \int_0^T\left(\delta\theta\mu D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} dt +$$

$$+\int_0^T \left(\delta W D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right)\Bigg|_{z=H} dt = -\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} dt dz - \int_0^T \int_0^H \delta D \mu \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} dt dz..$$

Складывая последнее равенство с соотношением (10) получим

$$-\int_0^H \int_0^T \delta\theta \left(\gamma_0 C \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right) dz dt -$$

$$-\int_0^H \int_0^T \delta W \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right) dz dt +$$

$$+\int_0^T \delta\theta \left(\alpha\psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right)\Bigg|_{z=H} dt + \int_0^T \delta W D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z}\Bigg|_{z=H} dt =$$

$$= -\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} dt dz - \int_0^T \int_0^H \delta D \mu \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} dz dt - \alpha_0 \int_0^T \delta D \left(\theta_{n+1} - T_g \right) \psi \Big|_{z=H} d\tau.$$

Предполагаем, что имеют место равенства:

$$\gamma_0 C \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\left(\alpha\psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right)\Bigg|_{z=H} = 2\big(\theta(H,t) - T_g(t)\big),$$

$$D_n(z) \frac{\partial U}{\partial z}\Bigg|_{z=H} = 2A_0 \big(W(H,t) - W_g(t) \big).$$

Тогда справедливо соотношение

$$2\int_0^T \delta\theta \big(\theta(H,t) - T_g(t) \big)\Big|_{z=H} dt + 2A_0 \int_0^T \delta W \big(W(z,t) - W_g(t) \big)\Big|_{z=H} dt =$$

$$= -\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial U}{\partial z} \left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} + \mu \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial z} \right) dz dt - \alpha_0 \int_0^T \delta D \left(\theta_{n+1} - T_g \right) \psi \Big|_{z=H} d\tau. \tag{11}$$

Следующее значение коэффициента диффузии ищется из монотонности функционала

$$F(\lambda_{n+1}) - F(\lambda_n) = \int_0^T \big(\theta(H,t) - T_g(t) \big)^2 dt + A_0 \int_0^T \big(W(H,t) - W_g(t) \big)^2 dt.$$

В этом случае

$$F(\lambda_{n+1})-F(\lambda_n)=2\int_0^T\delta\theta\big(\theta(H,t)-T_g(t)\big)dt+2A_0\int_0^T\delta W\big(W(H,t)-W_g(t)\big)dt+$$

$$+\int_0^T(\delta\theta)^2\Big|_{z=H}dt+A_0\int_0^T(\delta W)^2\Big|_{z=H}dt.$$

Учитывая (11) перепишем его в виде

$$F(\lambda_{n+1})-F(\lambda_n)=-\int_0^T\int_0^H\delta D\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial z}\right)dzdt+$$

$$+\int_0^T(\delta\theta)^2\Big|_{z=H}dt+A_0\int_0^T(\delta W)^2\Big|_{z=H}dt-\alpha_0\int_0^T\delta D\big(\theta_{n+1}-T_g\big)\psi\Big|_{z=H}d\tau$$

или

$$F(\lambda_{n+1})-F(\lambda_n)=-\int_0^T\int_0^H\delta D\frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta_n}{\partial z}\right)dzdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^H\delta D\frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial\delta W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)dzdt+$$

$$+A_0\int_0^T(\delta W)^2\Big|_{z=H}dt-\alpha_0\int_0^T\delta D\big(\theta-T_g\big)\psi\Big|_{z=H}d\tau-\alpha_0\int_0^T\delta D\delta\theta\psi\Big|_{z=H}d\tau.$$

Интуитивно ясно, что знак $F(\lambda_{n+1})-F(\lambda_n)$ определяется первым интегралом, стоящим в правой части знака равенства. Поэтому предполагаем, что

$$\delta k=\beta_n(z)\int_0^T\frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dt+\beta_n(z)\alpha_0\int_0^T\big(\theta-T_g\big)\psi\Big|_{z=H}d\tau, \qquad (12)$$

тогда

$$F(\lambda_{n+1})-F(\lambda_n)=-\int_0^H\beta_n(z)\left(\int_0^T\frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dt\right)^2dz-$$

$$\int_0^T\int_0^H\delta D\frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial\delta W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)dzdt+$$

$$+\int_0^T(\delta\theta)^2\Big|_{z=H}dt+A_0\int_0^T(\delta W)^2\Big|_{z=H}dt-\int_0^T\alpha_0\delta D\delta\theta\psi\Big|_{z=H}dt. \qquad (13)$$

В ходе вывода формул (12) и (13) нами получены задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0, \tag{14}$$

$$D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=H}=2A_0\big(W(H,t)-W_g(t)\big),\ \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0,\ U(z,T)=0, \tag{15}$$

$$\gamma_0 C\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0\,, \tag{16}$$

$$\left(\alpha\psi+\lambda\frac{\partial \psi}{\partial z}+\mu D_n(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)\bigg|_{z=H}=2\big(\theta(H,t)-T_g(t)\big), \tag{17}$$

$$\psi(0,t)=0,\ \psi(z,T)=0. \tag{18}$$

Литература:

1. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. – М.:Гостехиздат, 1954. – 444 с.
2. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокриологии (мерзлотоведения). / под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI . – М., 1959, с. 153-192.
3. Глобус А.М. Физика неизотермического внутрипочвенного влагообмена. –Л.: Гидрометиздат, 1983. – 279 с.

Рецензент: д.т.н., профессор Маймеков З.К.