МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Карасаев И.К.

ЛЯПУНОВДУН КИЧИ КӨРСӨТКҮЧҮНҮН ДАРАЖАЛЫК КАТАРГА АЖЫРАТУУ

Карасаев И.К.

РАЗЛОЖЕНИЕ МЛАДШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА В СТЕПЕННОЙ РЯД

I.K. Karasaev

EXPANSION LYAPUNOV'S YOUNGER INDEX IN POWER SERIES

УДК: 517.956 (575.2)

Ляпуновдун кичи көрсөткүчүн даражалык катарга ажыратуу, аны каалаган тактыкта эсептөөгө мүмкүндүк берет.

Негизги сөздөр: *матрица,нормалдык матрица, нормалдык аныктагыч, даражалык катар.*

Разложение младшего показателя Ляпунова позволяет его вычислять с любой степенью точности.

Ключевые слова: *матрица, нормальная матрица, нормальный определитель, степенной ряд.*

Expansion Lyapunov's younger index allows it calculate with any accuracy.

Key words: *matrix, normal matrix, normal determinant, power series.*

Введение

Здесь впервые в математической литературе младший показатель Ляпунова разлагается в степенной ряд. Тем самым удается вычислять младший показатель Ляпунова с любой степени точностью с указанием оценки погрешности, допущенной при вычислениях.

Теорема. Младший показатель Ляпунова **неполной** динамической системы

$$\ddot{x}(t) + a(t)x = 0 \tag{1}$$

$$a(t) = q_0(t) + \frac{1}{4}q_1^2(t) - \frac{1}{2}\dot{q}_1(t) \tag{2}$$

можно разложить в степенной ряд.

$$\lambda = -\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+1} + \ldots\right], \tag{3}$$

$$a = \sqrt{\omega} - \sqrt{\omega - 1}, \quad \omega = \pi^2 d(0) = 2\pi^2 a_{-1}a_1.$$

$d(0)$ определяется формулой Карасаева

$$d(0) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \ldots \\ \ldots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \ldots \\ \ldots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \ldots \\ \ldots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \ldots \\ \ldots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 2a_{-1}a_1.$$

Доказательство. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\ln a = \frac{1}{\pi}\ln\left[1 - (1-a)\right], \quad 0 < 1-a < 1, \pi = 3.141592654..$$

Поэтому

$$\lambda = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-a}{1} + \frac{(1-a)^2}{2} + \frac{(1-a)^3}{3} + \dots \frac{(1-a)^n}{n} + \dots\right]. \qquad (4)$$

Но этот ряд, как видим, медленно сходится. Преобразуем его в быстросходящийся. Известно, что для $|x|<1$ [26,с.421]

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right).$$

Положим

$$\frac{1+x}{1-x} = a.$$

Тогда

$$x = -\frac{1-a}{1+a},$$

который сходится быстрее, чем (4). Для второго показателя

$$\Lambda = -\frac{1}{\pi}\ln a = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+1} + \dots\right], (5)$$

Это позволяет вычислять показателя Ляпунова с любой степенью точности.

Наконец, для n – ой частной суммы, имеем

$$\lambda = -\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+1}\right] + r_n, (6)$$

$$r_n = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+3} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+5} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+7} -$$

остаток ряда после n-го члена.

Упростив остаток, имеем

$$r_n = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2N+3}\left[1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^4 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^6 + \dots\right], \qquad (7)$$

где

$$\left|\frac{1-a}{1+a}\right| < 1.$$

Правая часть (7) представляет собой геометрическую прогрессию. Поэтому, имеем

$$|r_n| \le \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2N+3}\cdot\varpi\ (n = 1, 2, 3, \dots), \omega = \frac{(1+a)^2}{4a^2}.$$

Таким образом, показатели Ляпунова **неполной динамической системы** можно вычислять с любой степенью точности по формуле

$$\lambda_n = -\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n+1}\right],$$

а допущенные остатки при каждом n можно вычислять по формуле

$$|r_n| \le \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2N+3}\cdot\varpi\ (n = 1, 2, 3, \dots), \omega = \frac{(1+a)^2}{4a^2}$$

Литература:

1. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Одесса,1922. – 393 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциальных и интегральных исчислений. - Т. II. – Физматгиз. - 1960. - 848 с.

Рецензент: д.ф.-м.н. Искандаров С.