ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO SCIENCE

Исаев А.Д.

ТҮЗ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БИР ЧЫГАРУУ ЫКМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Исаев А.Д.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A.D. Isaev

A METHOD FOR SOLVING NONLINEAR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Из математических проблем тысячелетия: Нелинейные дифференциальные уравнения точные решения которых неизвестны.

УДК: 519.642.6

Макалада түз сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу ыкмасы (Алмаз Бейдин ыкмасы) каралат.
Негизги сөздөр: *ийрилик теңдемеси, Риккати теңдемеси, Ван дер Поль осциллятору, Дуффинг теңдемеси, Матьё теңдемеси.*

*В статье рассматривается новый метод (**метод-подстановки Алмаз Бея**) при решении нелинейных дифференциальных уравнений: Осциллятора Ван дер Поля, уравнения Дуффинга, уравнения Матьё.*
Ключевые слова: *уравнение кривизны, уравнение Риккати, нелинейные дифференциальные уравнения, осциллятор Ван дер Поля, уравнение Дуффинга, уравнение Матьё.*

The article discusses a new method (method-lookup Almaz Bey) for solving nonlinear differential equations oscillator Van der Pol, Duffing equation, Mathieu equation.
Key words: *Equation of curvature, Riccati equation, nonlinear differential equations, Van der Pol oscillators, Duffing equation, Mathieu equation.*

I. Введение. Многообразие методов решения нелинейных дифференциальных уравнений диктуется её же конечной целью нахождения функции решения. В связи с этим на вопрос : Какой же из этих методов более общий или простой? Однозначного ответа пока нет. В этой работе предлагается новый метод выведенный из $[2]$ и применённый в работах $[3,4]$.

Актуальность. Необходимость в решении нелинейных дифференциальных уравнений описывающих процессы происходящие в природе и технике всегда подталкивало естественно-научный мир к поиску оптимальных подходов и методов в достижении цели. Нередко идеи приходили из решения прикладных задач. Одна из таких идей-методов и будет применена в специально выбранных задачах тысячелетия точные решения которых неизвестны.

II. 1 Теоретическая часть.

(Некоторые символы функций и аргументов изменены, согласно у стоявщимся стандартным обозначениям, местами аргументы будут опускатся не изменяя сути решения задач).

Согласно уравнению кривизны

$$\frac{x''(z)}{\sqrt{(1+(x')^2)^3}} = \underbrace{\frac{M_z(t)}{EI_z}}_{f(t)} \quad \Rightarrow \cos(\theta)\cdot d\theta = f(t)\cdot dt$$

$$f(t) = e^{V(t)} - \textit{непрерывна и интегрируема, рассматриваемом интервале} \quad (1)$$

$[2]$

$$(\textit{за исключением особых точек, где } \theta(t) = \frac{-\pi}{2} \;;\; \frac{+\pi}{2})$$

$$\sin(\theta) = F(t) + \underbrace{C_1}_{\substack{\textit{определяется}\\ \textit{условиями задачи.}}}$$

Суть **метода-подстановки Алмаз Бея**.

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(t)\cdot X^2(t) + b(t)\cdot X(t) + c(t) \qquad \textit{уравнение} \quad \textit{Риккати}.$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos(\theta)} + tg(\theta) = e^{W(\theta)} = X(t)\ ;\ \frac{dS}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos(\theta)} - tg(\theta) = e^{-W(\theta)} = \frac{1}{X(t)}$$

$$\textit{ясно, что}\ X(t) \neq x(t) \quad \textit{так, как} \quad x(t) = \int X(t)\,dt - S(t) + C \ ,\quad \theta = \theta(t)$$

$$\textit{расщепляя} \quad \textit{получим} \quad dW = d\sin(\theta) + \sin^2(\theta)d\sin(\theta) + \sin^4(\theta)d\sin(\theta) + ...$$

$$dW(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2\cdot n}(\theta))\cdot d\sin(\theta) = d\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2\cdot n+1}(\theta))}{2\cdot n+1}\right] \qquad \textit{для} \quad \textit{наибольших} \quad \textit{углов}.$$

$$\textit{заметим, что и}\ f(t) = e^{V(t)}\ , dV(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2\cdot n}(\phi)\cdot d\sin(\phi) = d\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2\cdot n+1}(\phi)}{2\cdot n+1}\right]$$

$$\textit{Граничные} \quad \textit{условия}: \quad \sin(\theta(t))\big|_{t=0} = 0\ ;\ \sin(\phi(t))\big|_{t=0}$$

$$\textit{пределах} \qquad -35^0 \leq \theta \leq +35^0 \quad \textit{можно} \quad \textit{принять}:$$

$$d\theta = d\sin(\theta) = dW(\theta) \quad \textit{или} \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{d\sin(\theta)}{dz} = \frac{dW(\theta)}{dz}$$

$$\textit{приняв} \quad \theta = 0 \ \rightarrow W(0) = \sin(\theta) = 0 \ \rightarrow \ e^{\sin(0)} = 1$$

где для уравнений Риккати получится

$$\frac{d\sin(\theta)}{dz} = a(t) + b(t) + c(t)\ ;\ \sin(\theta) = \int [a(t) + b(t) + c(t)]\cdot dt + C_\theta,$$

$$W(\theta) = \int \frac{1}{1-\sin^2(\theta)}\cdot d\sin(\theta) + C_w$$

$$\textit{далее, подставив} \quad dW(\theta) = \frac{1}{1-\sin^2(\theta)}\cdot d\sin(\theta) \ \ \textit{в} \ \ \textit{уравнение}$$

находится общее решение уравнения Риккати [3,4].

II.2 Уравнение (Осциллятор) Ван дер Поля.

$$\frac{d^2X}{dt^2}-\mu\cdot\left(1-X^2\right)\cdot\frac{dX}{dt}+X=0, \qquad (2)$$

где X *– координата точки, зависящая от времени* t;

μ *– некий коэффициент трения, характеризующий нелинейность и силу затухания колебания.*

Подставим в уравнение $X=e^W$ *получим. Помня, что* $W(\theta)=\sin(\theta)+\Delta W(\theta)+C_W$ [2]

$$\frac{d^2e^W}{dt^2}=\frac{d\left(e^W\cdot\frac{dW}{dt}\right)}{d\,t}=e^W\cdot\frac{dW}{dt}\cdot\frac{dW}{dt}+e^W\cdot\frac{d^2W}{d\,t^2}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}=e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{d\,t^2}\ ;\ \frac{dX}{dt}=e^W\cdot\frac{dW}{dt}$$

$$e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{d\,t^2}-\mu\cdot\left(1-\overbrace{X^2}^{e^{2\cdot W}}\right)\cdot e^W\cdot\frac{dW}{dt}+\overbrace{X}^{e^W}=0$$

Анализ II.2.1

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}-\mu\cdot\left(1-e^{2\cdot W}\right)\cdot\frac{dW}{dt}+1=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+1=\mu\cdot\left(1-e^{2\cdot W}\right)\cdot\frac{dW}{dt}$$

$$e^{2\cdot W}=\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\ \Rightarrow\ \left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+1=-2\cdot\mu\cdot\frac{\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\cdot\frac{dW}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+1}{2\cdot\mu\cdot\frac{dW}{dt}}}_{A(t)}=\frac{-\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\Rightarrow A(t)\cdot\left(1-\sin(\theta)\right)=-\sin(\theta)\Rightarrow \sin(\theta)=\frac{A(t)}{A(t)-1}$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)}=\frac{A(t)-1}{A(t)}=1-\frac{1}{A(t)}\Rightarrow\frac{1}{\frac{dy}{dS}}=1-\frac{1}{A(t)}\ ;\ dS-dy=\frac{-dy}{A(t)}=\frac{-1}{A(t)}\cdot tg(\theta)\cdot dt$$

$$\underbrace{\frac{dS}{dt}-\frac{dy}{dt}}_{e^{-W}}=\frac{-tg(\theta)}{A(t)}\quad \textit{так из } [2]\quad \frac{dM(\theta)}{d\Delta W}=tg(\theta)\quad \textit{где}\quad M(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)}+\cos(\theta)$$

для малых углов текущих точек $M(\theta)=2$ *и было доказано, что*

$$\frac{dM(\theta)}{d\Delta W}=tg(\theta)=0\ ;\ \sqrt{\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}}=\frac{1+\sin(\theta)+\frac{1}{1-\sin(\theta)}}{\underbrace{2}_{M(\theta)}}=e^{\sin(\theta)}$$

$$A(t)=-tg(\theta)\cdot e^W\ \Rightarrow\ dW(\theta)=d\sin(\theta)+\underbrace{\sin^2(\theta)}_{0}\cdot dW(\theta)$$

$$\frac{\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+1}{\mu\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dt}}=0 \qquad (3)$$

Анализ II.2.2

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+1}{2\cdot\mu\cdot\frac{dW}{dt}}}_{A(t)}=\frac{-\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\cdot\frac{d\sin(\theta)}{d\sin(\theta)}\quad;\quad\frac{1}{1-\sin(\theta)}\cdot d\sin(\theta)=\left(1+\sin(\theta)\right)\cdot dW$$

которое при преобразованиях приведёт: $\cos^2(\theta)=1-\sin^2(\theta)$

$$A(t)=-\sin(\theta)\cdot\left(1+\sin(\theta)\right)\cdot\frac{dW}{d\sin(\theta)}=-\sin(\theta)\cdot\frac{dW}{d\sin(\theta)}-\sin^2(\theta)\cdot\frac{dW}{d\sin(\theta)}$$

$$A(t)=-\sin(\theta)\cdot\frac{dW}{d\sin(\theta)}-\frac{d\Delta W}{d\sin(\theta)}\Rightarrow -A(t)=\sin(\theta)\cdot\frac{dW}{d\sin(\theta)}+\frac{d\left(W-\sin(\theta)\right)}{d\sin(\theta)}$$

для малых углов текущих точек: $dW=d\sin(\theta)$

$$\frac{\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+1}{\mu\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dt}}=-\sin(\theta)$$

$$-\left[\frac{\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+1}{\mu\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dt}}\right]=\frac{\frac{\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+1}{\mu\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dt}}}{\frac{\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+1}{\mu\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dt}}-1}$$

снова $$\frac{\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+1}{\mu\cdot\frac{d\sin(\theta)}{dt}}=0$$

$$\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{dt^2}+1=0\ ;\ \frac{d\sin(\theta)}{dt}=f(t)$$

$$f^2(t)+\frac{df(t)}{dt}+1=0;\quad \frac{df(t)}{f^2(t)+1}=-dt\ \Rightarrow\ arctg\,\big(f(t)\big)=C_t-t;\quad f(t)=tg(C_t-t)\qquad (4)$$

$$при\qquad f(t)=e^{V(t)}\Big|_{t=0}=1\ \rightarrow\ C_t=\frac{\pi}{4}\ \ по\ \ условию\ \ \ задачи\ .$$

$$\frac{d\sin(\theta)}{dt}=tg(C_t-t)\ ;\ \ d\sin(\theta)=tg(C_t-t)\cdot dt\ \Rightarrow\ \sin(\theta)=\ln\left|C_\theta\cdot\cos(C_t-t)\right|$$

$$\sin(\theta)=th(W)=\ln\left|C_\theta\cdot\cos(C_t-t)\right|\ \Rightarrow\ W(\theta)=Arth\left[\ln\left|C_\theta\cdot\cos(C_t-t)\right|\right]$$

$$при\quad \sin\big(\theta(t)\big)\Big|_{t=0}=0\ \Rightarrow\ C_\theta=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$X(t)=e^{\sin(\theta)}\cdot e^{\Delta W}=C_\theta\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\Delta W}$$

Далее ,

$$\sin(\theta)=\frac{A(t)}{A(t)-1}\quad ;\ W(\theta)=Arth\ \left[\ln\left|C_\theta\cdot\cos(C_t-t)\right|\right]$$

$$d\Delta W=d\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\sin(\theta)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}\ ;\qquad \Delta W=\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\sin(\theta)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_{\Delta W}$$

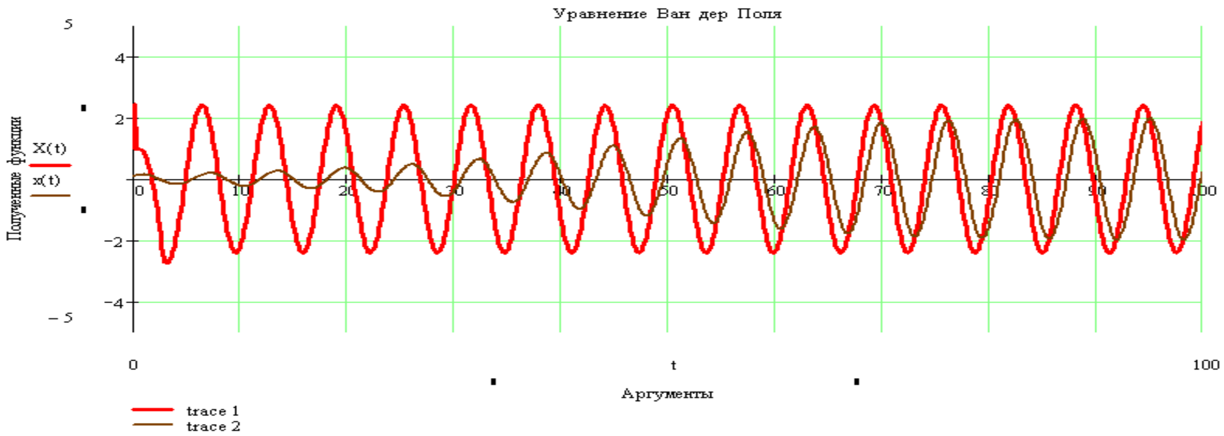
$$\frac{A(t)}{A(t)-1}=\frac{\dfrac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2+\dfrac{d^2W}{dt^2}+1}{2\cdot\mu\cdot\dfrac{dW}{dt}}}{\dfrac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2+\dfrac{d^2W}{dt^2}+1}{2\cdot\mu\cdot\dfrac{dW}{dt}}-1}=\frac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2+\dfrac{d^2W}{dt^2}+1}{\underbrace{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2+\dfrac{d^2W}{dt^2}+1-2\cdot\mu\cdot\dfrac{dW}{dt}}_{B(t)}}$$

$$\Delta W=\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[\dfrac{\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+1}{\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+1-2\cdot\mu\cdot\frac{dW}{dt}}\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_{\Delta W}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[B(t)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_{\Delta W}\qquad (5)$$

$B(t)$ – *ðàçëàãàåòñÿ â ðÿä Òåéëîðà.*

$$X(t)=C_\theta\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\Delta W}\qquad (6)$$

решение уравнения Ван дер Поля.



Ðèñ 1. ω = 1 ; μ = 0,1

II.3 Уравнение Дуффинга.

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\omega^2\cdot X=-\mu\cdot X^3 \qquad (7)$$

где ω -циклическая частота, μ -коэффициент затухания (параметры уравнения.)

$$\frac{d^2X}{dt^2}=e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{dt^2}$$

$$e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2\cdot X=-\mu\cdot X^3$$

$$e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2\cdot e^W=-\mu\cdot e^{3\cdot W}$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2=-\mu\cdot e^{2\cdot W}$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2=-\mu\cdot\left(\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right)\ ;\qquad \underbrace{\frac{\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2}{\mu}}_{A(t)}=-\left(\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right)$$

$$\sin(\theta)=\frac{A(t)+1}{A(t)-1}$$

С аналогичны ми размышлени ями и здесь .

для малых углов текущих точек . $dW(\theta)=d\sin(\theta)$ *или* $\frac{dW(\theta)}{dt}=\frac{d\sin(\theta)}{dt}$

$$\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{dt^2}+\omega^2=-\mu\cdot e^{2\cdot\overbrace{\sin(\theta)}^{0}}=-\mu\cdot\left(\frac{1+\overbrace{\sin(\theta)}^{0}}{1-\underbrace{\sin(\theta)}_{0}}\right)$$

$$\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{dt^2}+\omega^2=-\mu$$

$$f^2(t)+\frac{df(t)}{dt}+\omega^2=-\mu\ ;\qquad \frac{df(t)}{f^2(t)+\omega^2+\mu}=-dt\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{f(t)}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)=C_t-t$$

из граничных условий : $f(t)=e^{V(t)}\big|_{t=0}=1\ \Rightarrow\ C_t=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)$

$f(t)=\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]$ *из таблицы интегралов* [1] *имеем*

$$\frac{d\sin(\theta)}{dt}=\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[(-t+C_t)\cdot\sqrt{\omega^2+\mu}\right]$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}=e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{d\,t^2}$$

$$e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{d\,t^2}+\omega^2\cdot X=-\mu\cdot X^3$$

$$e^W\cdot\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+e^W\cdot\frac{d^2W}{d\,t^2}+\omega^2\cdot e^W=-\mu\cdot e^{3\cdot W}$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+\omega^2=-\mu\cdot e^{2\cdot W}$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+\omega^2=-\mu\cdot\left(\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right);\quad \underbrace{\frac{\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{d\,t^2}+\omega^2}{\mu}}_{A(t)}=-\left(\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right)$$

$$\sin(\theta)=\frac{A(t)+1}{A(t)-1}$$

С аналогичными размышлениями и здесь.

для малых углов текущих точек. $dW(\theta)=d\sin(\theta)$ *или* $\frac{dW(\theta)}{dt}=\frac{d\sin(\theta)}{dt}$

$$\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+\omega^2=-\mu\cdot e^{2\cdot\overbrace{\sin(\theta)}^{0}}=-\mu\cdot\left(\frac{1+\overbrace{\sin(\theta)}^{0}}{1-\underbrace{\sin(\theta)}_{0}}\right)$$

$$\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2+\frac{d^2\sin(\theta)}{d\,t^2}+\omega^2=-\mu$$

$$f^2(t)+\frac{df(t)}{d\,t}+\omega^2=-\mu\;;\quad\frac{df(t)}{f^2(t)+\omega^2+\mu}=-dt\;\Rightarrow\;\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{f(t)}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)=C_t-t$$

из граничных условий : $f(t)=e^{V(t)}\Big|_{t=0}=1\;\Rightarrow\;C_t=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)$

$f(t)=\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]$ (8) *из таблицы интегралов* [1] *имеем*

$$\frac{d\sin(\theta)}{dt}=\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[(-t+C_t)\cdot\sqrt{\omega^2+\mu}\right]$$

$$\sin(\theta)=\int\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[(-t+C_t)\cdot\sqrt{\omega^2+\mu}\right]dt+\ln|C_\theta|$$

$$\sin(\theta)=\ln\left|C_\theta\cdot\cos\left[(-t+C_t)\cdot\sqrt{\omega^2+\mu}\right]\right.$$

$$\sin(\theta(t))\big|_{t=0}=0;\;1=C_\theta\cdot\cos\left[(-t+C_t)\cdot\sqrt{\omega^2+\mu}\right]$$

$$C_\theta=\frac{1}{\cos\left[\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)\cdot\sqrt{\omega^2+\mu}\right]}=\frac{1}{\cos\left[arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)\right]}\quad(9)$$

$$X(t) = e^{\sin(\theta)} \cdot e^{\Delta W} = C_\theta \cdot \cos\left(\left(-t + C_t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 + \mu}\right) \cdot e^{\Delta W}$$

Далее,

$$\sin(\theta) = th(W) = \ln\left|C_\theta \cdot \cos\left[\left(-t + C_t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 + \mu}\right]\right|$$

$$W(\theta) = Arth\left[\ln\left|C_\theta \cdot \cos\left[\left(-t + C_t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 + \mu}\right]\right|\right]$$

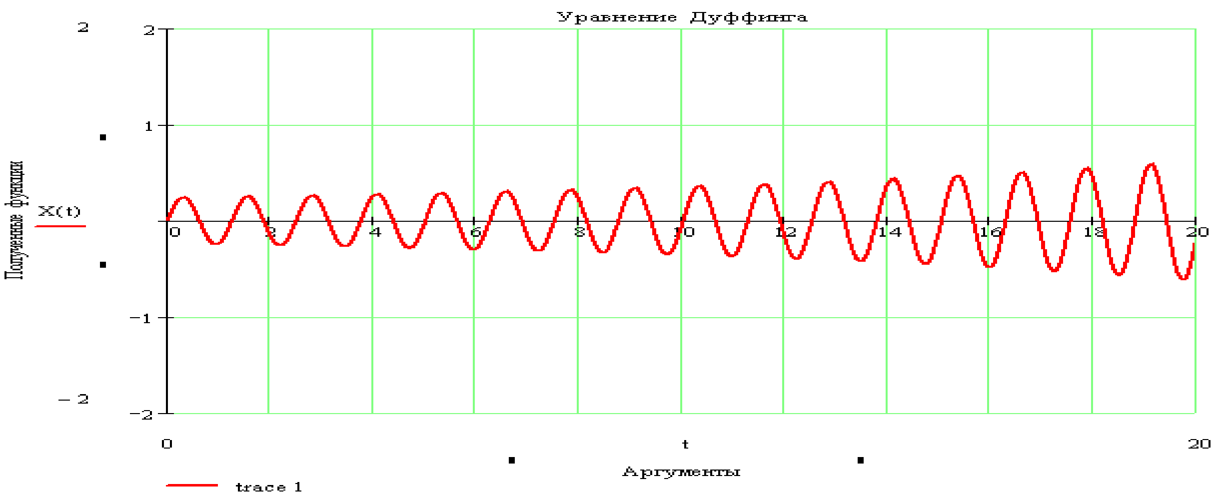
$$\sin(\theta) = \frac{A(t)+1}{A(t)-1} = \frac{\dfrac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2 + \dfrac{d^2W}{dt^2} + \omega^2}{\mu} + 1}{\dfrac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2 + \dfrac{d^2W}{dt^2} + \omega^2}{\mu} - 1} = \underbrace{\frac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2 + \dfrac{d^2W}{dt^2} + \omega^2 + \mu}{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2 + \dfrac{d^2W}{dt^2} + \omega^2 - \mu}}_{B^*(t) - \text{разложением в ряд Тейлора.}}$$

$$d\Delta W = d\sum_{n=1}^{N} \frac{\left[\sin(\theta)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1} \quad ; \qquad \Delta W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\left[\sin(\theta)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1} + C_{\Delta W}$$

$$\Delta W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\left[B^*(t)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1} + C_{\Delta W} \qquad (10)$$

$$X(t) = C_\theta \cdot \cos\left(\left(-t + C_t\right) \cdot \sqrt{\omega^2 + \mu}\right) \cdot e^{\Delta W} \qquad (11)$$

решение уравнения Дуффинга.



Ðèñ 2. ω = 5 ; μ = 0,1

II.4 Уравнение Матьё.

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 \cdot X = -\mu \cdot X \cdot \cos(2 \cdot t) \qquad (12)$$

$$e^W \cdot \left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + e^W \cdot \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2 \cdot e^W = -\mu \cdot e^W \cdot \cos(2 \cdot t)$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2 = -\mu \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot t)}_{e^{\Delta W}}$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2 = -\mu \cdot e^W \qquad где \quad e^{\overbrace{\sin(\theta)}^{0}} \cdot e^{\Delta W}$$

$$\underbrace{\frac{\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2\right]^2}{\mu^2}}_{A(t)} = e^{2 \cdot W} = \frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{A(t)-1}{A(t)+1} = \underbrace{\frac{\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2\right]^2 - \mu^2}{\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2\right]^2 + \mu^2}}_{B^{**}(t)}$$

для малых углов текущих точек: $dW(\theta) = d\sin(\theta)$ *или* $\frac{dW(\theta)}{dt} = \frac{d\sin(\theta)}{dt}$

$$\underbrace{\frac{\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} + \omega^2\right]^2}{\mu^2}}_{A(t)} = e^{2 \cdot W} = \frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}$$

$$\frac{\left[\left(\frac{d\sin(\theta)}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\sin(\theta)}{dt^2} + \omega^2\right]^2}{\mu^2} = \frac{1+\overbrace{\sin(\theta)}^{0}}{1-\underbrace{\sin(\theta)}_{0}} = 1$$

$$\frac{df(t)}{dt} + f^2(t) + \omega^2 = -\mu \;\Rightarrow\; \frac{df(t)}{f^2(t)+\omega^2+\mu} = -dt$$

по аналогии решения уравнения Дуффинга

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{f(t)}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)=C_t-t$$

$$\text{из граничных условий}: f(t)=e^{V(t)}\Big|_{t=0}=1\Rightarrow C_t=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\cdot arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)$$

$$f(t)=\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right] \qquad (13)$$

$$\frac{d\sin(\theta)}{dt}=f(t)=\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot tg\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]$$

$$\sin(\theta)=\ln\left|C_\theta\cdot\cos\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]\right| \Rightarrow e^{\sin(\theta)}=C_\theta\cdot\cos\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]$$

$$C_\theta=\frac{1}{\cos\left[arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\mu}}\right)\right]} \qquad (14)$$

$$th(W)=\sin(\theta)=\ln\left|C_\theta\cdot\cos\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]\right|\Rightarrow W(\theta)=Arth\left(\ln\left|C_\theta\cdot\cos\left[\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right]\right|\right)$$

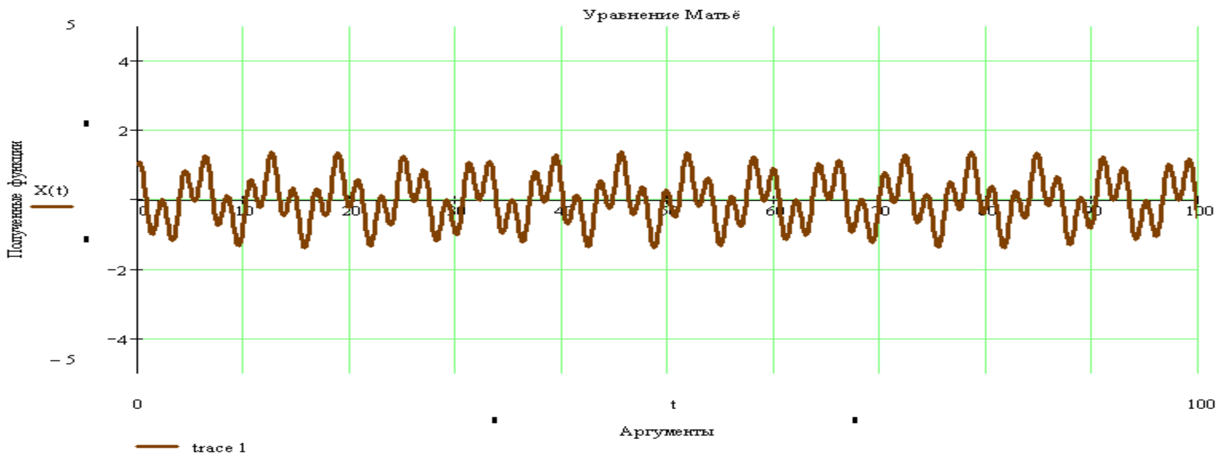
$$\text{с подстановк ой последней формулы } \underbrace{\frac{\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2\right]^2-\mu^2}{\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\frac{d^2W}{dt^2}+\omega^2\right]^2+\mu^2}}_{B^{**}(t)}=\sin(\theta)$$

$B^{**}(t)$ *– разлагаетс я в ряд Тейлора .*

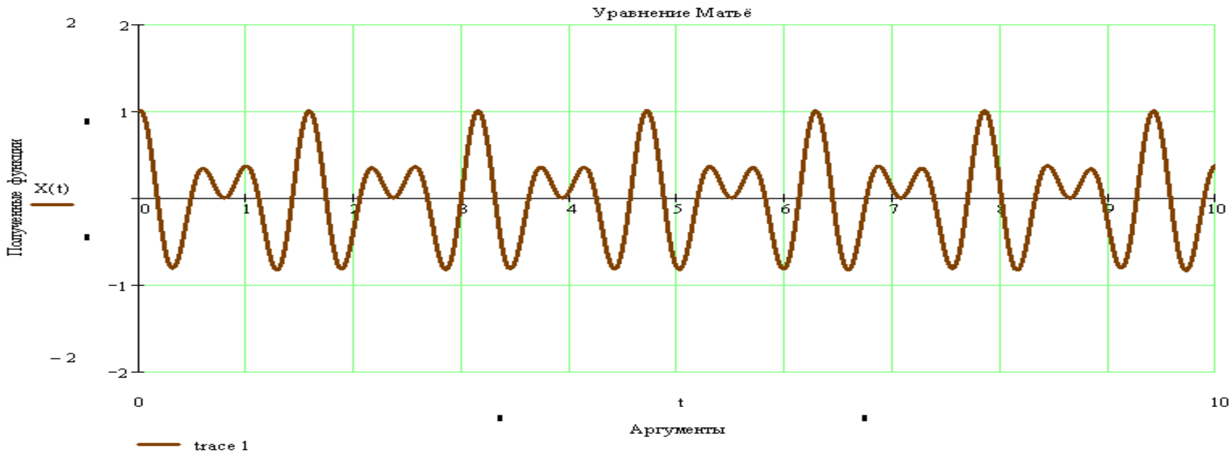
$$\Delta W=\sum_{n=1}^{N}\frac{[\sin(\theta)]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_{\Delta W}; \qquad \Delta W=\sum_{n=1}^{N}\frac{\left[B^{**}(t)\right]^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_{\Delta W};\quad e^{\Delta W}=\cos(2\cdot t) \qquad (15)$$

$$X(t)=C_\theta\cdot\cos\left(\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\right)\cdot e^{\Delta W}\Rightarrow X(t)=C_\theta\cdot\cos\sqrt{\omega^2+\mu}\cdot(C_t-t)\cdot\cos(2\cdot t) \quad (16)$$

решение уравнения Матьё.



Ðèñ3. ω=1 ; μ=0,1



Ðèñ4. $\omega = 10$; $\mu = 0{,}5$

III.Вывод: Метод-подстановки Алмаз Бея применённый в решении уравнений **Ван дер Поля**, **Дуффинга**, **Матьё**, графики функций-решений на **Mathcad 11** дают сходство с приближенными решениями полученными в других работах. Хотя и эти решения сами по себе разнятся. Есть основания полагать , что при дальнейшей углубленной разработке метода могут быть получены точные результаты. Относительно же самого метода, то его доступность и простота в математическом анализе, возможно в дальнейшем поможет найти ключ ко многим другим задачам подобного класса.

Литература:

1. Г. Б. Двайт, Таблица интегралов, («Наука», Москва,1973),стр150-160)
2. А.Д. Исаев, Задача о поперечном нелинейном изгибе, («Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», Бишкек 2015, №4, стр 28-50)
3. А.Д. Исаев, Нелинейный поперечный изгиб, интеграл вероятности и уравнение Риккати, («Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана», Бишкек 2016, №5, стр--)
4. А.Д. Исаев, Об одном общем решении уравнения Риккати, («Вестник КГПУ им. Арабаева», Бишкек 2016, №2, стр--)

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Омуралиева А.С.