Курбанбаева Н.

E_4 ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Курбанбаева Н.

О КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЯХ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_4

N. Kurbanbaeva

ABOUT QUASIDOUBLE LINES OF A PARTIAL MAPPING OF THE SPACE E_4

УДК: 514.75

Рассмотрено семейство гладких линий в области Ω евклидова пространства E_4 так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3,4) в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4. На касательной к линии ω^1 сети Френе инвариантным образом определяется точка $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Получается частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4$.

Определено понятие квазидвойной линии частичного отображения и доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией частичного отображения f_1^4.

Ключевые слова: *Репер Френе, циклическая сеть Френе, псевдофокус, двойная линия отображения, распределения.*

Төрт ченемдүү евклиддик мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү каралган: ар бир $X \in \Omega \subset \AA_4$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган кыймылдуу $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3,4) реперин берилген сызыктар көптүгүнүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынат. $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Френенин торчосун түзүшөт. Бул торчонун ω^1 сызыгынын $(X, \vec{e}_1)$ жанымасында F_1^4 чекити аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде, F_1^4 чекити өзүнүн Ω_1^4 аймагын сызып чыгат. Натыйжасында $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ бөлүктөп чагылтуусу пайда болот: $f_1^4(X) = F_1^4$.

Бул макалада “чагылтуунун квазикошмок сызыгы” түшүнүгү аныкталган жана үч ченемдүү $\Delta_{(123)}$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон β сызыгы f_1^4 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыгы болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Негизги сөздөр: *Френенин торчосу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, чагылтуунун квазикошмок сызыгы, бөлүштүрүү.*

In the domain $\Omega \subset \AA_4$ it is considered a set of smooth lines such that through a point $X \in \Omega$ passed one line of given se. The moving frame $R = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net Σ_4 of Frenet. There exists a point $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$ on the tangent of the line ω^1. When the point X is shifted in the domain Ω, the point F_1^4 describes it's domain Ω_1^4 in E_4. It is definca a partial mapping $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ such that $f_1^4(X) = F_1^4$.

The notion of quasidouble line of a mapping is defined. Necessary and sufficient conditions in order that a line β belonging to the three dimensional distribution $\Delta_{(123)}$ is quasidouble line of the mapping f_1^4 are proved.

Key words: *Frenet frame, cyclic net of Frenet, quasidouble line of mapping, distribution, pseudofocus.*

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_1)\ (i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i\,,\ d\vec{e}_i = \omega_i^{\ k} \vec{e}_k\,. \tag{1}$$

Формы $\omega^i, \omega_i^{\ k}$ удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i{}_k\,,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k\,,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j\,. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i\,. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j\,.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell\,.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell) \wedge \omega^j = 0\,.$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il} \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l)\omega^m \tag{5}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\right\}$ образуют геометрический обьект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2\,,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3\,,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4\,,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0,\ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0 \tag{6}$$

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0 \tag{7}$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-векторам:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i . \tag{8}$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ - F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ - F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ - F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий $\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$. Псевдофокус $F_1^4 \in (X,\vec{e}_1)$ определяется радиус-векторам:

$$F_1^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^1}\vec{e}_1 \tag{9}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4$.

К области Ω_1^4 присоединим подвижной репер $\Re' = (F_1^4, \vec{b}_i)$ $(i = 1,2,3,4)$, где векторы имеют вид [8]:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i ; \qquad \vec{b}_2 = \frac{b_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{12}^4}\vec{e}_i ;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{b_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i + \vec{e}_3 ; \qquad \vec{b}_4 = \frac{b_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i + \vec{e}_4$$

Так как заданная сеть E_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2 \quad ; \qquad \vec{b} = \frac{b_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{12}^4}\vec{e}_4 ; \tag{10}$$

$$\vec{b}_3 = \frac{b_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_4 + \vec{e}_3 \quad ; \qquad \vec{b}_4 = \frac{b_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Линий ω^i , $\varphi(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения φ, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X , $\varphi(x)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Введем понятия квазидвойной линии отображения.

Определение. Линии γ, $\varphi(\gamma) = \overline{\gamma}$ называются квазидвойными линиями отображения φ евклидова пространства E_4, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $\varphi(x)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству $E_3 \subset E_4$.

Рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(123)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1\beta^2\vec{e}_2 + \beta^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_1^4(\beta)$:

$$\vec{\overline{\beta}} = \beta^1\vec{b}_1 + \beta^2\vec{b}_2 + \beta^3\vec{b}_3 = \beta^1(b_1^1\vec{e}_1 + b_1^2\vec{e}_2) + \beta^2(b_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b_2^4\vec{e}_4) + \beta^3(b_3^1\vec{e}_1 + b_3^2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^4\vec{e}_4)$$

или $\vec{\vec{\beta}} = (\beta^1 b_1^1 + \beta^2 b_2^1 + \beta^3 b_3^1)\vec{e}_1 + (\beta^1 b_1^2 + \beta^2 + \beta^3 b_3^2)\vec{e}_2 + \beta^3 \vec{e}_3 + (\beta^2 b_2^4 + \beta^3 b_3^4)\vec{e}_4$ где b_i^j - j-тая координата вектора $\vec{b}_i$

Из условия

$$\vec{\beta}, \vec{\vec{\beta}}, \overline{XF_1^4} \in \Delta_{(123)} \qquad (11)$$

имеем: $\beta^2 b_2^4 + \beta^3 b_3^4 = 0$

Учитывая формул (10) отсюда получим:

$$\beta^2\left(-\frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}\right) + \beta^3\left(-\frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4}\right) = 0$$

или $\Lambda_{12}^4 \beta^2 + \Lambda_{13}^4 \beta^3 = 0$

Отсюда имеем:

$$\frac{\beta^3}{\beta^2} = -\frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{13}^4} \qquad (12)$$

где Λ_{12}^4 - четвертая координата вектора $\vec{\Lambda}_{12} = d_2 \vec{e}_1$ вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_1$ вдоль направлению $\vec{e}_2$, Λ_{13}^4 - четвертая координата вектора $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1$ вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_1$ вдоль направлению $\vec{e}_3$.

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (12), то выполняется условие (11). Таким образом, справедлива

Теорема. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией частичного отображения $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ тогда и только тогда, когда вторая и третья координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (12).

Литература:

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст]/П.К.Рашевский//Москва. Наука. 1967.-С.481-482.
2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И.А.Схоутен, Д.Дж.Стройк. // Москва. ИЛ. 1948.Т.II-348.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П.Фиников // М-Л.: Госттехиздат. 1948.- 432.
4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т.Базылев // Литовский математический сборник, 1966. VI. №4.- С.475-491.
5. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г.Матиева // Монография. Ош, 2003.- С. 212-219.
6. Кузьмин М.К. Сети, определяемые рапределениями в евклидовом пространстве E_n [Текст] / М.К. Кузмин // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1975.-Т.7.-С.215-229.
7. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т.Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 1975.вып.6.- С.19-25.
8. Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева О свойствах одного частичного отображения евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий// Международный научный журнал “Наука, вчера, сегодня, завтра”. Уфа, 2015г – С. 15-22/

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.