ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Курбанбаева Н.

ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ ЖӨНҮНДӨ

Курбанбаева Н.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ОДНОГО ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

N. Kurbanbaeva

ABOUT EXISTENCE OF THE DOUBLE LINES OF THE EUCLIDEAN SPACE

УДК: 514.75

E_4 мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын ушундай көптүгү каралган: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана сызыгы өтөт. Ω аймагында орто нормаланган кыймылдуу $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3,4) репери берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынган. $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Френенин торчосун Σ_4 түзүшөт. Бул торчонун ω^4 сызыгынын $(X, \vec{e}_4)$ жанымасында F_4^3 чекити жашайт. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде, F_4^3 чекити өзүнүн $\Omega_4^3 \subset E_4$ аймагын сызып чыгат. Натыйжада $f_4{}^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз: $f_4{}^3(X) = F_4{}^3$.

а) $\Delta_{(43)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон γ сызыгы $(f_4{}^3, \Delta_{(34)})$ түгөйүнүн кошмок сызык болушунун;

б) $\Delta_{(14)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон β сызыгы $(f_4{}^3, \Delta_{(14)})$ түгөйүнүн кошмок сызык болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Негизги сөздөр: *Френенин точосу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, чагылтуунун кошмок сызыгы, бөлүштүрүү.*

Рассмотрено семейство гладких линий в области Ω евклидова пространства E_4 так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3,4) в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4. На касательной к линии ω^4 сети Френе инвариантным образом определяется точка $F_4{}^3 \in (X, \vec{e}_4)$. Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_4{}^3$ описывает свою область $\Omega_4{}^3 \subset E_4$. Получается частичное отображение $f_4{}^3 : \Omega \to \Omega_4{}^3$ такое, что $f_4{}^3(X) = F_4{}^3$. Найдены необходимое и достаточные условия для того, чтобы:

а) линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(43)} = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_3)$, являлась двойной линией пары $(f_4{}^3, \Delta_{(34)})$;

б) линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$, являлась двойной линией пары $(f_4{}^3, \Delta_{(41)})$;

Ключевые слова: *Сеть Френе, циклическая сеть Френе, псевдофокус, двойная линия отображения, распределение.*

In the domain $\Omega \subset \AA_4$ it is considered a set of smooth lines such that through the point $X \in \Omega$ passed one line of given set. The moving orthonormal frame $R = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net $\sum_4$ of Frenet. There exists a point $F_1^4 \in (X, \vec{e}_4)$ on the tangent of the line ω^4.

When the point X shifted in the domain Ω, the point $F_4^{\ 3}$ describes it's domain Ω_4^3 in E_4. It is defined a partial mapping $f_4^{\ 3}:\Omega\to\Omega_4^{\ 3}$ such that $f_4^{\ 3}(X)=F_4^{\ 3}$. The necessary and sufficient condition in order that:

a) a line γ, belonging to the distribution $\Delta_{(43)}=(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$ is double line of the pair $(f_4^{\ 3},\Delta_{(43)})$;

б) a line β, belonging to the distribution $\Delta_{(14)}=(X,\vec{e}_1,\vec{e}_4)$ is double line of the pair $(f_4^{\ 3},\Delta_{(14)})$ are proved.

Key words: *Frenet's net, cyclic net of Frenet, pseudofocus, a double line of a mapping, a distribution.*

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re=(X,\vec{e}_1)\ (i,j,k=1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1, с. 481-482], [2, с. 348] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^{\ k}\vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы $\omega^i,\omega_i^{\ k}$ удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega^i{}_k,\ D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,\ \omega_i^j+\omega_j^i=0 \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k=\Lambda_{ij}^k\omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k=-\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j+\Lambda_{ij}^kD\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j\wedge\omega_j^k=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j+\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^\ell\wedge\omega_\ell^j$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j\wedge\Lambda_{j\ell}^k\omega^\ell=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j-\Lambda_{ij}^k\omega_\ell^j\wedge\omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k\omega_i^j\wedge\omega^\ell=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j-\Lambda_{ij}^k\omega_\ell^j\wedge\omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j-\Lambda_{i\ell}^k\omega_j^\ell\wedge\omega^j-\Lambda_{j\ell}^k\omega_i^j\wedge\omega^\ell=0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k-\Lambda_{i\ell}^k\omega_j^\ell-\Lambda_{\ell j}^k\omega_i^\ell)\wedge\omega^j=0.$$

Применяя лемму Картана [3, с. 432] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k-\Lambda_{i\ell}^k\omega_j^\ell-\Lambda_{\ell j}^k\omega_i^\ell=\Lambda_{ijm}^k\omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k=B_{ijm}^k\omega^m \tag{5}$$

где $B_{ijm}^k=\Lambda_{ijm}^k+\Lambda_{i\ell}^k\Lambda^\ell{}_{jm}+\Lambda_{\ell j}^k\Lambda_{im}^\ell$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^k,\Lambda_{ijm}^k\right\}$ образуют геометрический обьект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1=\Lambda_{11}^2\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2=\Lambda_{21}^1\vec{e}_1+\Lambda_{21}^3\vec{e}_3,$$

$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda^2_{31}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{31}\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda^3_{41}\vec{e}_3$$

и

$$\Lambda^3_{11} = -\Lambda^1_{31} = 0,\ \Lambda^4_{11} = -\Lambda^1_{41} = 0 \qquad (6)$$
$$\Lambda^4_{21} = -\Lambda^2_{41} = 0 \qquad (7)$$

Здесь $k^1_1 = \Lambda^2_{11}$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21}$, $k^1_3 = \Lambda^4_{31}$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4, с. 475-491] F^j_i $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-векторам:

$$\vec{F}^j_i = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda^j_{ij}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda^i_{jj}}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F^2_1, F^3_1, F^4_1, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ - F^1_2, F^3_2, F^4_2, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ - F^1_3, F^2_3, F^4_3, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ - F^1_4, F^2_4, F^3_4.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5, С. 212-219], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий $\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$. Псевдофокус $F^3_4 \in (X,\vec{e}_4)$ определяемый радиус-векторам:

$$F^3_4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_4 \qquad (9)$$

Когда точка X смещается в области Ω, точка $F^3_4 \in (X,\vec{e}_1)$ описывает свою область $\Omega^3_4 \subset E_4$. Получим частичное отображение $\mathrm{f}^3_4 : \Omega \to \Omega^3_4$ такое, что $f(X) = F^3_4$.

К области Ω^3_4 присоединим подвижной репер $\Re' = (F^3_4, \vec{c}_i)$ (8)

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, координатные векторы $\Re'$ имеют вид [8]:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^3_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{B^3_{431}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4; \qquad \vec{c}_2 = -\frac{\Lambda^1_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{B^3_{432}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4;$$
$$\vec{c}_3 = -\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \frac{B^3_{433}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4; \qquad \vec{c}_4 = -\frac{\Lambda^1_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{B^3_{434}}{(\Lambda^3_{43})^2}\right)\vec{e}_4 \qquad (10)$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $\mathrm{f}^3_4 : \Omega \to \Omega^3_4$ является невырожденным.

Линии ω^i, $f^3_4(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения f^3_4, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f^3_4(x)$ пересекаются, либо параллельны [7, С. 19-25].

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4$. Найдем координаты касательного вектора $\vec{\overline{\gamma}}$ линии $\overline{\gamma} = f^3_4(\gamma)$: $\vec{\overline{\gamma}} = \overline{\gamma}^3\vec{c}_3 + \overline{\gamma}^4\vec{c}_4$.

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\vec{\overline{\gamma}} = (\overline{\gamma}^3 c^1_3 + c^1_4\overline{\gamma}^4)\vec{e}_1 + (\overline{\gamma}^3 c^4_3 + \overline{\gamma}^4 c^4_4)\vec{e}_4$$

где c^j_i - j - тая координата вектора $\vec{c}_i$.

Из условия компланарности векторов:

$\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overline{XF_4^3} = -(1/\Delta_{43}^3)\vec{e}_4$ имеем:

$$\frac{\bar{\gamma}^4}{\bar{\gamma}^3} = -\frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{44}^1} \tag{11}$$

Обратно, если имеет место равенство (11), то линия γ является двойной линией отображения f_4^3 (тем самым и двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(34)})$, т.к. $\gamma \in \Delta_{(34)}$). Следовательно, справедлива

Теорема 1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(34)})$ тогда и только тогда, когда выполнено условию (11) (где Λ_{44}^1-первая кривизна линии ω^4 циклической сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ Френе, Λ_{43}^1-первая кривизна линии ω^3 циклической сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ Френе).

Аналогично, рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(14)} = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_4^3(\beta)$: $\vec{\bar{\beta}} = \bar{\beta}^1\vec{c}_1 + \beta^4\vec{c}_4$.

Учитывая (10) отсюда получим: $\bar{\beta}^1 c_1^3 = 0$, где c_1^3 - третья координата вектора $\vec{c}_1$.

В силу первого равенства формулы (10) отсюда имеем: $\bar{\beta}^1\Lambda_{41}^3 = 0$, следовательно (т.к. $\bar{\beta}^1 \neq 0$, т.е. линия β не совпадает с линией ω^4) $\Lambda_{41}^3 = 0$ ($-\Lambda_{41}^3 = \Lambda_{31}^4 = k_3^1$ – третья кривизна линии ω^1 заданного семейства).

Верно и обратное утверждение. Таким образом доказана

Теорема 2. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, является двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(14)})$, тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\Lambda_{41}^3 = 0$.

Следствие. Если линия $\beta \in \Delta_{(14)}$ совпадает с координатной линией ω^4 циклической сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ Френе (ω^4 всегда является двойной линией отображения f_4^3) [8], то пара $(f_4^3, \Delta_{(14)})$ не имеет других двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(14)}$.

Литература:

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст]/П.К. Рашевский // Москва. Наука. 1967.-С.481-482.
2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И.А.Схоутен, Д.Дж.Стройк. // Москва. - ИЛ.,1948. Т. II. - С. 348.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П.Фиников // М-Л.: Госттехиздат. 1948.- 432.
4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т.Базылев // Литовский математический сборник, 1966. VI. №4. - С.475-491.
5. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г.Матиева // Монография. Ош, 2003.- С. 212-219.
6. Кузьмин М.К. Сети, определяемые рапределениями в евклидовом пространстве E_n [Текст] / М.К. Кузмин // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1975.-Т.7.-С.215-229.
7. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т.Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 1975.вып.6.- С.19-25.
8. Г.Матиева, Ж.А.Артыкова О частичном отображении 4-мерного евклидова пространства, порождаемом заданной сетью гладких линий // Международный научный журнал "Символ науки". Уфа, 2015г – С. 10-16

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.