Искандаров С., Байгесеков А.М.

ЭКИНЧИ ТӨРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАРЫМ ОКТОГУ АБСОЛЮТТУК ЖАНА КВАДРАТТЫК ИНТЕГРАЛДАНЫШЫ ЖӨНҮНДӨ

Искандаров С., Байгесеков А.М.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ВТОРОГО РОДА

S. Iskandarov, A.M. Baigesekov

ABOUT ABSOLUTE AND SQUARE-INTEGRABLE ON THE HALF OF SOLUTION OF LINEAR VOLTERRA - STIELTJES INTEGRAL EQUATION OF SECOND KIND

УДК: 517.968

Сызыктуу экинчи түрдөгү Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жарым октогу абсолюттук жана квадраттык интегралданышынын функциянын белгиси тибиндеги жетиштүү шарттары табылат. Изилдөө каралуучу теңдеменин бош мүчөсү аталган касиеттерге ээ болбой калышы мүмкүн учурунда жүргүзүлөт. Интегралдоо өсүүчү функция боюнча аныкталат. Теңдемелерди өзгөртүү методу, салмактык жана кесүүчү функциялар методунун идеясы жана бөлүктөп интегралдоо методу өнүктүрүлөт. Иллюстративдик мисалдар тургузулат.

***Негизги сөздөр**: Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемеси, өсүүчү функция боюнча туунду, абсолюттук интегралданыш, квадраттык интегралданыш, функциянын белгиси тибиндеги шарттар, салмактык функция, кесүүчү функция.*

Устанавливаются достаточные условия типа знака функций абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода. Исследование проводится без предположения, что изучаемыми свойствами обладает свободный член рассматриваемого уравнения. Интегрирование ведется по возрастающей функции. Развиваются метод преобразования уравнений, идея метода весовых и срезывающих функций и метод интегрирования по частям. Строятся иллюстративные примеры.

***Ключевые слова**: интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса, производная по возрастающей функции, абсолютная интегрируемость, квадратичная интегрируемость, условия типа знака функций, весовая функция, срезывающая функция.*

We establish sufficient condition of type of sign functions for absolute and square integrable on the half of solution of linear Volterra - Stieltjes integral equation of second kind. Research is conducted without the assumption that studied the properties of the free term of the equation. The integration is on an increasing function. Develop method for transforming equations, the idea of a method of weighting and cutting functions and the method of integration by parts. Construct illustrative examples.

***Key words:** volterra-Stieltjes integral equation, derivative on increasing function, integrable, square integrable, condition of type of sign functions, weighting function, cutting function.*

Все фигурирующие ниже функции являются непрерывными и соотношения справедливы при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$;

$J = [t_0, \infty)$; ИУВС- интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

Для простоты рассмотрим ИУВС второго рода вида

$$x(t) + \int_{t_0}^{t} (a(t))^{-1} K(t,\tau) b(t) b(\tau) x(\tau) dg(\tau) = (a(t))^{-1} f(t) b(t), \qquad t \ge t_0 \tag{1}$$

где $g(t)$- возрастающая функция и $dg(\tau)$ понимается в смысле определения А.Асанова [1].

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия типа знака функций принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p = 1,2)$ решения ИУВС (1) без предположения, что его свободный член $(a(t))^{-1} f(t) b(t) \in L_g^p(J,R)$ $(p = 1,2)$. Насколько нам известно, такая задача решается впервые. Отметим что для случае уравнения типа Вольтерра (в (1) $g(t) \equiv t$) подобная задача ранее решена во много работах первого автора, например , в [2, 3].

В настоящей работе будем использовать следующие обозначения из [1]: $x(t) \in L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$ означает $\int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p \, dg(t) < \infty$ $(p=1,2)$;

$$f'_{g(t)} = \frac{df(t)}{dg(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta g(t)} \quad \text{(если предел существует)};$$

$$K'_{g(t)}(t,\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{K(t+\Delta t,\tau) - K(t,\tau)}{g(t+\Delta t) - g(t)} \quad \text{(если предел существует)};$$

$$K'_{g(\tau)}(t,\tau) = \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{K(t,\tau+\Delta\tau) - K(t,\tau)}{g(\tau+\Delta\tau) - g(\tau)} \quad \text{(если предел существует)};$$

$$K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau) = \frac{\partial K'_{g(t)}(t,\tau)}{\partial g(\tau)} = \frac{\partial K'_{g(\tau)}(t,\tau)}{\partial g(t)} = K''_{g(\tau)g(t)}(t,\tau),$$

поскольку мы договорились о том, что все фигурирующие в работе функции являются непрерывными.

Аналогично преобразованиям двойного интеграла (1. 18) и интеграла (1. 19) из [4, с. 47] можно установить, что справедливы следующие преобразования с интегралами Стилтьеса по возрастающей функции $g(t)$:

$$2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)b(s)x(s)b(\tau)x(\tau)dg(\tau)dg(s) = K(t,t_0)(X(t,t_0))^2 -$$
$$-\int_{t_0}^{t} K'_{g(s)}(s,t_0)(X(s,t_0))^2 dg(s) + \int_{t_0}^{t} K'_{g(\tau)}(t,\tau)(X(t,\tau))^2 dg(\tau) -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K''_{g(s)g(\tau)}(s,\tau)(X(s,\tau))^2 dg(\tau)dg(s), \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s)a(s)x(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s)dg(s)X(s,t_0) = f(t)X(t,t_0) - \int_{t_0}^{t} f'_{g(s)}(s)X(s,t_0)dg(s), \tag{3}$$

где $X(t,\tau) = \int_{t_0}^{t} b(\eta)x(\eta)dg(\tau).$

В получении (2), (3) применяется метод интегрирования по частям. Заметим, что преобразование (2) проведено также в [5].

Для решения $x(t)$ ИУВС (1) умножаем его на $a(t)x(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t по возрастающей функции $g(t)$, в том числе по частям, используем преобразования (2), (3), а также вводим некоторую функцию $c(t)$ следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t} c'_{g(s)}(s)dg(s) = c(t) - c(t_0).$$

Тогда аналогично тождеству (1.20), [4, с. 47] получаем тождество:

$$2\int_{t_0}^{t} a(s)(x(s))^2 dg(s) + K(t,t_0)(X(t,t_0))^2 - 2f(t)X(t,t_0) + c(t) -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[K'_{g(s)}(s,\tau)\left(X(s,t_0)\right)^2-2f'_{g(s)}(s)X(s,t_0)+c'_{g(s)}(s)\right]dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)\left(X(t,\tau)\right)^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(s)g(\tau)}\left(X(s,\tau)\right)^2dg(\tau)dg(s)\equiv c(t_0) \qquad (4)$$

Из тождества (4) непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА. Пусть

1) $a(t)>0$; 2) $K(t,t_0)\geq 0$, $K'_{g(t)}(t,t_0)\leq 0$, существует функция $c(t)$ такая, что $\left(f(t)\right)^2\leq K(t,t_0)\,c(t)$, $\left(f'_{g(t)}(t)\right)^2\leq K'_{g(t)}(t,t_0)c'_{g(t)}(t)$;

3) $K'_{g(\tau)}(t,\tau)\geq 0$, $K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)\leq 0$.

Тогда для решения $x(t)$ ИУВС (1) верно утверждение

$$a(t)\left(x(t)\right)^2\in L^1_{g(t)}(J,R). \qquad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если 1) выполняются все условия теоремы:

2) $\left(a(t)\right)^{-1}\in L^1_{g(t)}(J,R_+/\{0\})$, то решение ИУВС $x(t)\in L^1_{g(t)}(J,R)$.

Это следует аналогично теореме 2 [3]из неравенства

$$|x(t)|=|x(t)|\left(a(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(a(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}\left[a(t)\left(x(t)\right)^2+\left(a(t)\right)^{-1}\right] \qquad (*)$$

интегрированием на отрезке $[t_0,t]$ по функции $g(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если 1) выполняются все условия теоремы:

2) $a(t)\geq a_0>0$, то решение ИУВС $x(t)\in L^2_{g(t)}(J,R)$.

Утверждение следствие 2 получается из (5), используя $a(t)\geq\inf\limits_{t\geq t_0}a(t)=a_0>0$.

ПРИМЕР 1. Для ИУВС

$$x(t)+\int_0^t\frac{e^{-t+t^2+\tau^2}}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+2}x(\tau)d\left(\sqrt{\tau}\right)=-\frac{e^{-t+t^2}}{\sqrt{t}+3},\quad t\geq 0$$

выполняются все условия следствия 1 при $a(t)\equiv e^t$, $b(t)\equiv e^{t^2}$, здесь $t_0=0$, $c(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{t}+2}$. Значит, решение этого ИУВС $x(t)\in L^1_{\sqrt{t}}(R_+,R)$, хотя его свободный член $\notin L^1_{\sqrt{t}}(R_+,R)$.

ПРИМЕР 2. ИУВС

$$x(t)+\int_0^t\frac{(t+1)^{12}(\tau+1)^{12}\sin t\sin\tau}{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}+5}x(\tau)d\left(\sqrt[3]{\tau}\right)=\frac{(t+1)^{12}\sin t}{\sqrt[3]{t}+7},\quad t\geq 0$$

удовлетворяет всем условиям следствия 2 при $a(t)\equiv 1$, $b(t)\equiv(t+1)^{12}\sin t$, здесь $t_0=0$, $c(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}+5}$.

Следовательно, решение рассмотренного ИУВС $x(t) \in L^2_{\sqrt[3]{t}}(R_+, R)$ несмотря на то, что его свободный член $\notin L^2_{\sqrt[3]{t}}(R_+, R)$

Таким образом, нами показано, что нашли класс ИУВС, для которого выше сформулированная задача имеет решение.

Литература:

1. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. - Бишкек: Кыргызко-Турецкий университет «Манас», 2001. - С. 18-64.
2. Искандаров С. О принадлежности пространству $L^2[t_0, \infty)$ решения интегрального уравнения Вольтерра // Тез. докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. - Алма-Ата: Наука, 1979. - Ч.1. - С. 150-151.
3. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим,1984. - Вып. 17. - С. 166-174.
4. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. - Бишкек: Илим, 2002. - С. 216.
5. Толубаев Ж. К вопросу о принадлежности пространству $L^2_g[t_0, \infty)$ Решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стильтьеса // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим,2010. - Вып. 42. - С. 64-70.

Рецензент: д.ф.-м.н. Байзаков А.Б.