***ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ***
***ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ***
***PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE***

*Исманов Ю.Х., Алымкулов С.А.*

# ЧЕКТЕЛГЕН АПЕРТУРАСЫ МЕНЕН КАЙТАЛАП ЖӨНГӨ САЛУУЧУ ОБЪЕКТТЕРДИ ӨЗҮН-ӨЗҮ КАЙРА ЖАРАТУУ

*Исманов Ю.Х., Алымкулов С.А.*

# САМОРЕПРОДУЦИРОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ОБЪЕКТОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ АПЕРТУРОЙ

*Yu.Kh. Ismanov, S.A. Alymkulov*

# SELFREPRODUCTION OF REGULAR OBJECTS HAVING LIMITED APERTURE

*УДК: 535.41: 778.38*

*Чектелген апертурага ээ болгон кайталап жөнгө салуучу объекттерди өзүн-өзү кайра жаратуу эффектиси анчалык жетишсиз үйрөтүлгөн. Бул макалада чектелген объекттин апертурасын когеренттүү жалпак толкун менен жарыктандыруу астында кайталап жөнгө салуучу чектелген апертуранын өзүн-өзү кайра жаратуу калыптанышына тийгизген таасири каралган.*

***Негизги сөздөр:*** *кайталап жөнгө салуучу объект, өзүн-өзү кайра жаратуу, чектелген апертура, Френелдик кайра түзүү, жарык толкуну.*

*Эффект саморепродуцирования регулярных объектов, имеющих ограниченную апертуру изучен достаточно слабо. В данной статье рассматривается влияние ограничений апертуры объекта на формирование саморепродукций при освещении когерентной плоской волной регулярного объекта ограниченной апертуры.*

***Ключевые слова****: регулярный объект, саморепродукция, ограниченная апертура, преобразование Френеля, световая волна.*

*Self- reproduction effect of regular objects with a limited aperture was studied quite poorly. This article discusses the impact of object aperture restrictions on the formation of self-reproductions by the regular object illuminated by coherent plane wave.*

***Key words:*** *regular object, self-reproduction, limited aperture, Fresnel transformation, light wave.*

Эффект безлинзового формирования изображений периодических структур впервые был зарегистрирован Тальботом в 1836 г. [1].

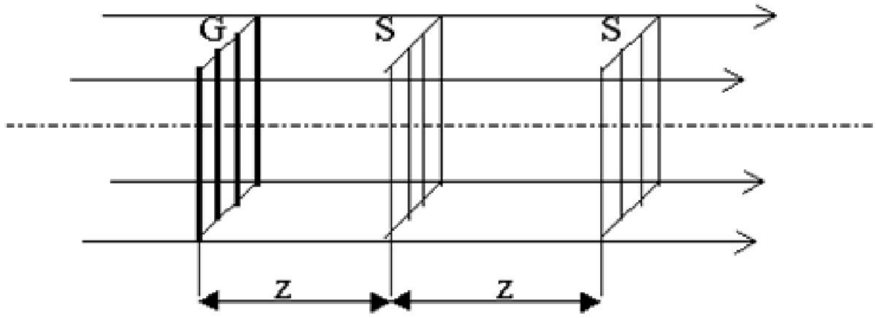


**Рис. 1.** Эффект Тальбота. G - линейная решетка, S - саморепродукции решетки.

Первое теоретическое обоснование этому явлению для случая простых линейных решеток типа Ронки, дал Рэлей [2]. Он показал, что, если осветить решетку G плоской волной, то на расстояниях кратных $z = \dfrac{2d^2}{\lambda}$ , где $d$ – период решетки, $\lambda$ - длина освещающей волны, возникают изображения решетки – саморепродукции S (рис. 1).

Функция пропускания решетки может быть представлена как Фурье – разложение вида [3]

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi jmx / d), \tag{1}$$

где $d$ – период решетки.

С учетом приближения Гудмена [3] запишем выражение для поля на расстоянии $z$ от плоскости решетки в виде

$$u_z(x,y,z)=\frac{\exp(jkz)}{ikz}\iint\limits_{\infty}u(x_0,y_0,z_0^+)\exp\{\frac{j\pi}{\lambda z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\}dx_0dy_0 \qquad (2)$$

Выражение (2) – представляет собой дифракционный интеграл в виде преобразования Френеля, которое получается, как параксиальное приближение общего дифракционного интеграла [4].

Дифракционный интеграл (2) можно рассчитать аналитически.

Несложные расчеты показывают, что окончательное выражение для поля на расстоянии $z$ от плоскости решетки можно представить в виде [5]

$$u_z(x,y,z)=\frac{\exp(jkz)}{jkz}\exp[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)]\exp[-j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)]\lambda\,\mathrm{z}\exp(\mathrm{j}\pi/2)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\exp[j2\pi(\frac{mx}{d}-\frac{m^2\lambda z}{2d^2})]=\frac{\lambda^2\exp(jkz)}{j2\pi}\exp(j\pi/2)\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\exp[j2\pi\times \qquad (3)$$

$$\times(\frac{mx}{d}-\frac{m^2\lambda z}{2d^2})]$$

Из (3) видно, что на расстояниях, определяемых соотношением $z=\frac{2d^2}{\lambda}M$ , где $M$ = 1,2,3,…, выражение (3) с точностью до несущественных фазовых множителей повторяет выражение для поля сразу за решеткой (1). Иными словами на расстояниях кратных $z=\frac{2d^2}{\lambda}$ решетка как бы репродуцирует свои изображения – возникают распределения, которые называют саморепродукциями.

Выражение (3) получено в соответствие с параболическим приближением. Однако важным условием применимости этого приближения является требование, чтобы последующий член разложения показателя экспоненты $\exp[jk(z^2+r^2)^{0,5}]$ в импульсном отклике $G_1(r)$ был мал, например меньше $10^{-2}\pi$, т. е. в разложении мы пренебрегаем слагаемыми $k(x-x_0)^4/8z^3<\pi/100$ и $k(\mathrm{y}-y_0)^4/8z^3<\pi/100$. Тогда, учитывая $x-x_0=m\lambda z/d$ ($m$ – номер дифракционного порядка, $d$ – период решетки), получим, что выражение (3) описывает распределение поля за решеткой с ограниченным пространственным спектром

$$|m|\le|L|\approx(d/\lambda)(\lambda/25z)^{0,25} \qquad (4)$$

Если период решетки взять равным $d=5\times10^{-4}$ м, длину волны падающего на решетку излучения $\lambda=6\times10^{-7}$ м, а расстояние $z=2d^2/\lambda$, т. е. постоянной Тальбота, то $|m|\le 20$. Гармоники высших порядков $|m|>|L|$ также участвуют в формировании интерференционной картины в плоскости воспроизведения, однако, не повышают контрастность картины, а выступают как шум.

Приведенные выше рассуждения верны только для периодических объектов неограниченных размеров. В реальной ситуации мы имеем дело с объектами, имеющими ограниченные размеры, и было бы естественно, если выражение (3) можно было обобщить на случай объектов с ограниченной апертурой.

Зададим апертуру решетки в виде

$$C(x_0,y_0)=\begin{matrix}1 & \text{при } |x_0|\le a,|y_0|\le a \\ 0 & \text{при } |x_0|>a,|y_0|>a,\end{matrix} \qquad (5)$$

где $2a$ - апертура решетки, $(x_0,y_0)$ – координаты плоскости решетки. Учет апертуры изменяет пределы интегрирования в (2).

Учитывая этот факт, а также с учетом условия (4) получаем окончательное выражение для поля на расстоянии $z$ от плоскости решетки с ограниченной апертурой в следующем виде

$$u_z(x,y,z) = \frac{\exp(jkz)}{2\lambda z} \sum_{m=-L}^{L} a_m \exp[j2\pi(\frac{mx}{d} - \frac{m^2 \lambda z}{2d^2})]\{\mathrm{F}[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-y)] -$$
$$-\mathrm{F}[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-y)]\}\sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\exp(-j\frac{\pi}{\lambda z}x^2)\{\mathrm{F}[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-x+\frac{m\lambda z}{d})] - \qquad (6)$$
$$-\mathrm{F}[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-x+\frac{m\lambda z}{d})]\}.$$

где $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(jy^2) dy^2$ - интеграл Френеля.

$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(jy^2) dy^2$ - описывает спираль Корню, которая подчиняется условию $\lim F(\xi) = 1/2(1+i)$ при $\xi \to \infty$. Т. е. при $\xi \gg 1$ распределение поля за решеткой с ограниченной апертурой близко к распределению за бесконечной решеткой. В частности, при $z = \frac{2d^2}{\lambda}M$, где $M$ = 0,1,2,3,…, распределение повторяет поле на решетке, т. е. воспроизводится с точностью до быстро меняющихся множителей в первых $M$ гармониках.

Из (6) следует, что влияние конечной апертуры решетки на распределение поля мало, если $(a - \frac{L\lambda z}{d}) - |x| \gg \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}}$. В плоскостях воспроизведения это условие имеет вид

$$a - 2LMd - |x| \gg d\sqrt{2M/\pi}. \qquad (7)$$

Из (7) видно, что ухудшение распределения поля по краям происходит из-за дифракции на апертуре *2a* в области размером порядка $\sqrt{\lambda z}$, а также, вследствие наклонного распространения пространственных гармоник, в области размером $\sim L\lambda z/d$. При этом на расстояниях $z \geq d^2/(M^2\lambda)$ преобладают искажения второго рода [6].

**Литература:**


1. Talbot H.F. Facts relating to optical science. // Phil. Mag.- 1836.- Ser. 3.- V. 9.- No. 56. - P. 401-404.
2. Rayleigh One coping diffraction grating and one some phenomena connected therewith. // Phil. Mag.- 1881.- Ser. 5. - V. 11.- No.67. - P. 169-173.
3. Гудмен Д. Введение в Фурье – оптику. - М.: Мир, 1970. - С. 311.
4. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. -М: Мир, 1971. - С. 496.
5. Исманов Ю.Х., Ишмаков Р. Синтез голограммы Френеля периодических объектов. // Традиции и новации в культуре университетского образования: Труды Международной научной конференции, ч. 2. - Бишкек, 1998. - С. 46-51.
6. Коряковский А.С., Марченко В.М., Прохоров А.М. Дифракционная теория метода тальбот – интерферометрии и диагностика широкоапертурных волновых фронтов. // Труды института общей физики. - М., 1987.- Т. 7. - С. 33-90.


**Рецензент: академик НАН КР Жумалиев К.М.**