Мамытов А.О.

СЫЗЫКТУУ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ИЧКИ ЧЕКИТТЕРДЕГИ КОШУМЧА ШАРТТАРЫ МЕНЕН БЕРИЛГЕН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Мамытов А.О.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ВО ВНУТРЕННИХ ТОЧКАХ

A.O. Mamytov

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF FOURTH DEGREE WITH REDEFINED AT INTERIOR POINTS

УДК: 517.95

Бул иште ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселеси изилденди. Ал үчүн Гриндин функциясынын жардамы менен түз маселе эквиваленттүү интегралдык теңдемеге алынып келинди жана маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденди. Анан тескери маселелердин ыкмаларын пайдаланып тиешелүү тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденди.

Негизги сөздөр: *тескери маселе, Гриндин функциясы, Вольтерра теңдемеси, жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме.*

В работе исследована обратная задача определения правой части для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с переопределениями во внутренних точках. Сначала с помощью функции Грина исходная прямая задача сходится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь методами обратных теорий задач, доказывается существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, дифференциальные уравнения с частными производными, функция Грина, уравнения Вольтера.*

We have studied the inverse problem of determining the right-hand side for a differential equation with partial derivatives of the fourth order with a redefinition of the interior points. First, using the Green's function initial direct problem converges to an equivalent problem, for which we prove the existence and uniqueness of solutions. Next, using the methods of the theory of inverse problems, we prove the existence and uniqueness of solutions to the inverse problem.

Key words: *Inverse problem, differential equations with partial derivatives of the Green's function, Volterra equation.*

Исследуется следующая обратная задача: найти функции $u(t,x) \in C^{2,2}(G)$ и $\varphi(t) \in C[0,T], G = [0,T] \times [0,1]$ удовлетворяющие уравнение

$$u_{tt}(t,x) = a_0 u_{ttxx}(t,x) + a_1 u_{xx}(t,x) + b_1(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + b_2(t,x)u(t,x) + \\ +\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) f_i(t,x) + F(t,x), \forall (t,x) \in G = [0,T] \times [0,1] \tag{1}$$

и заданным начальным и краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), x \in [0,1] \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, t \in [0,T] \tag{3}$$

где известны следы решения $u(t,x)$ в точках $x_i, i = 1,2,...,n,$

$$t \in [0,T], u(t,x_i) = g_i(t), 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1, \\ b_1(t,x), b_2(t,x), f(t,x), F(t,x) \in C(G) \\ u_0(x) \in C^2[0,1], g(t) \in C^2[0,T] \tag{4}$$

и выполняется условия согласования

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, g_i(0) = u_0(x_i), i = 1, 2, ..., n . \qquad (5)$$

К настоящему времени обратные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую почти во все сферы математики, включая алгебру, анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и др. С другой стороны, теория обратных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в физике, медицине, экологии, экономике.

На данный момент в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка. Различные обратные задачи рассмотрены в работах [1-6]. В данной работе рассматривается обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка.

Введем новую неизвестную функцию

$$v(t,x) = u_{tt}(t,x). \qquad (6)$$

Из (6) имеем

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_0^t v(s,x)ds + u_1(x), \\ u(t,x) &= \int_0^t \int_0^s v(\tau,x)d\tau ds + u_1(x)t + u_0(x) = \\ &= \int_0^t (t-s)v(s,x)ds + u_1(x)t + u_0(x). \end{aligned} \qquad (7)$$

Учитывая (6) и (7) из (1) получим

$$v(t,x) = a_0 v_{xx}(t,x) + a_1[\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds + u_1''(x)t + u_0''(x)] +$$

$$+ b_1(t,x)[\int_0^t (t-s)v_x(s,x)ds + u_1'(x)t + u_0'(x)] + b_2(t,x)[\int_0^t (t-s)v(s,x)ds +$$

$$+ u_1(x)t + u_0(x)] + \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) f_j(t,x) + F(t,x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_{xx}(t,x) = &-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds - \frac{1}{a_0}u_1''(x)t - \frac{1}{a_0}u_0''(x) - \\ &- \frac{1}{a_0}b_1(t,x)[\int_0^t (t-s)v_x(s,x)ds + u_1'(x)t + u_0'(x)] - \\ &- \frac{1}{a_0}b_2(t,x)[\int_0^t (t-s)v(s,x)ds + u_1(x)t + u_0(x)] - \\ &- \frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^n \varphi_j(t) f_j(t,x) - \frac{1}{a_0}F(t,x) + \frac{1}{a_0}v(t,x) \end{aligned} \qquad (8)$$

Вводя обозначения

$$F_1(t,x) = -\frac{1}{a_0}u_1''(x)t - \frac{1}{a_0}u_0''(x) - \frac{1}{a_0}b_1(t,x)[u_1'(x)t + u_0'(x)] - \\ -\frac{1}{a_0}b_2(t,x)[u_1(x)t + u_0(x)] - \frac{1}{a_0}F(t,x) \tag{9}$$

Уравнение (8) запишем в виде

$$v_{xx}(t,x) = -\frac{a_1}{a_0}\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds - \\ -\frac{1}{a_0}\int_0^t (t-s)v_x(s,x)b_1(t,x)ds - \frac{1}{a_0}b_2(t,x)\int_0^t (t-s)v(s,x)ds - \\ -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^n \varphi_j(t)f_j(t,x) + \frac{1}{a_0}v(t,x) + F_1(t,x). \tag{10}$$

Применяя $R(t,s) = \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}sh\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\}$ ядро $K(t,s) = -\frac{a_1}{a_0}(t-s), \frac{a_1}{a_0} < 0$ из (10) имеем

$$v_{xx}(t,x) = -\frac{1}{a_0}\int_0^t (t-\tau)b_1(t,x)v_x(\tau,x)d\tau - \\ -\frac{1}{a_0}b_2(t,x)\int_0^t (t-\tau)v(\tau,x)d\tau + \\ +\frac{1}{a_0}v(t,x) - \frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^n \varphi_j(t)f_j(t,x) + F_1(t,x) - \\ -\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_0^t sh\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\}\,\{\frac{1}{a_0}b_1(s,x)\int_0^s (s-\tau)v_x(\tau,x)d\tau + \\ +\frac{1}{a_0}b_2(s,x)\int_0^s (s-\tau)v(\tau,x)d\tau - \frac{1}{a_0}v(s,x) + \\ +\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^n \varphi_j(s)f_j(\mathrm{s},x) - F_1(s,x)\}ds \tag{11}$$

Вводя обозначения

$$F_2(t,x) = F_1(t,x) + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_0^t sh\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\}F_1(s,x)ds \tag{12}$$

и применяя формулы Дирихле из (11) имеем

$$v_{xx}(t,x)-\frac{1}{a_0}v(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^t[b_1(t,x)(t-\tau)+$$

$$+\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_\tau^t sh\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\}b_1(s,x)(s-\tau)ds]v_x(\tau,x)d\tau-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t[b_2(t,x)(t-\tau)+$$

$$+\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_\tau^t sh\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\}b_2(s,x)(s-\tau)ds]v(\tau,x)d\tau-$$

$$-\frac{1}{a_0}[\sum_{j=1}^n\varphi_j(t)f_j(t,x)-\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\sum_{j=1}^n\int_0^t sh\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\}f_j(s,x)\varphi_j(s)ds]+$$

$$+F_2(t,x). \qquad (13)$$

Используя функция Грина $G(x,\xi)$ определенная в работе [3] Лемма 2, из (13) получим

$$v(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\{-\frac{1}{a_0}\int_0^t[b_1(t,\xi)(t-\tau)+$$

$$+\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_\tau^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))b_1(s,\xi)(s-\tau)ds]v_\xi(\tau,\xi)d\tau-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t[b_2(t,\xi)(t-\tau)+$$

$$+\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_\tau^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))b_2(s,\xi)(s-\tau)ds]v(\tau,\xi)d\tau-$$

$$-\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^n\varphi_j(t)f_j(t,\xi)+$$

$$+\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\sum_{j=1}^n\int_0^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))f_j(s,\xi)\varphi_j(s)ds]+ \qquad (14)$$

$$+F_2(t,\xi)\}d\xi,$$

где

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(-\dfrac{\sqrt{a}}{4sh\dfrac{1}{\sqrt{a}}}[e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}sh\dfrac{\xi}{\sqrt{a}}-sh\dfrac{1-\xi}{\sqrt{a}}]+\dfrac{\sqrt{a}}{4}e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}})e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}}+\\ +(-\dfrac{\sqrt{a}}{4sh\dfrac{1}{\sqrt{a}}}[sh\dfrac{1-\xi}{\sqrt{a}}-e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}sh\dfrac{\xi}{\sqrt{a}}]-\dfrac{\sqrt{a}}{4}e^{-\frac{\xi}{\sqrt{a}}})e^{\frac{x}{\sqrt{a}}},0\le x\le\xi;\\ (-\dfrac{\sqrt{a}}{4sh\dfrac{1}{\sqrt{a}}}[e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}sh\dfrac{\xi}{\sqrt{a}}-sh\dfrac{1-\xi}{\sqrt{a}}]-\dfrac{\sqrt{a}}{4}e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}})e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}}+\\ +(-\dfrac{\sqrt{a}}{4sh\dfrac{1}{\sqrt{a}}}[sh\dfrac{1-\xi}{\sqrt{a}}-e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}sh\dfrac{\xi}{\sqrt{a}}]+\dfrac{\sqrt{a}}{4}e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}})e^{\frac{x}{\sqrt{a}}},0\le\xi\le x.\end{cases} \tag{15}$$

Вводим обозначения

$$K_1(t,x,\xi,\tau)=-\frac{1}{a_0}G(x,\xi)[b_1(t,\xi)(t-\tau)+ \\ +\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_\tau^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))b_1(s,\xi)(s-\tau)ds], \tag{16}$$

$$K_2(t,x,\xi,\tau)=-\frac{1}{a_0}G(x,\xi)[b_2(t,\xi)(t-\tau)+ \\ +\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\int_\tau^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))b_2(s,\xi)(s-\tau)ds], \tag{17}$$

$$m_j(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)f_j(t,\xi)d\xi,\ j=1,2,...,n \tag{18}$$

$$F_3(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_2(t,\xi)d\xi \tag{19}$$

тогда уравнение (14) можно записать в виде

$$v(t,x)=\int_0^t\int_0^1[K_1(t,x,\xi,\tau)v_\xi(\tau,\xi)+ \\ +K_2(t,x,\xi,\tau)v(\tau,\xi)]d\xi d\tau+\sum_{j=1}^n m_j(t,x)\varphi_j(t)+ \\ +\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\sum_{j=1}^n\int_0^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))m_j(s,x)\varphi_j(s)ds+F_3(t,x). \tag{20}$$

Полагая $x=x_i, i=1,2,...,n$ и учитывая (6) и (4), из (20) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(t,x_i)\varphi_j(t) + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))m_j(s,x_i)\varphi_j(s)ds =$$
$$= -\int_0^t\int_0^1 [K_1(t,x_i,\xi,\tau)v_\xi(\tau,\xi) + \tag{21}$$
$$+K_2(t,x_i,\xi,\tau)v(\tau,\xi)]d\xi d\tau + g''(t) - F_3(t,x_i)$$

Дифференцируя по x, из (20) получим

$$v_x(t,x) = \int_0^t\int_0^1 [K_{1x}{}'(t,x,\xi,\tau)v_\xi(\tau,\xi) +$$
$$+K_{2x}{}'(t,x,\xi,\tau)v(\tau,\xi)]d\xi d\tau + \sum_{j=1}^{n} m_{jx}{}'(t,x)\varphi_j(t) + \tag{22}$$
$$+\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s))m_{jx}{}'(s,x)\varphi_j(s)ds + F_{3x}{}'(t,x).$$

Предположим, что

$$\det\begin{pmatrix} m_1(t,x_1) & m_2(t,x_1)... & m_n(t,x_1) \\ m_1(t,x_2) & m_2(t,x_2)... & m_n(t,x_2) \\ ... & ... & ... \\ m_1(t,x_n) & m_2(t,x_n)... & m_n(t,x_n) \end{pmatrix} \neq 0, \forall t \in [0,T] \tag{23}$$

Таким образом, для определения $\varphi_i(t), v(t,x)$ и $v_x(t,x), i = 1,2,...,n.$ Мы получили систему линейных интегральных уравнений Вольтера второго рода (20), (21) и (22). Тем самым доказано следующий **теорема.** Пусть выполняются условия (5), (23), $b_1(t,x), b_2(t,x),$ $F(t,x), f(t,x) \in C(G), u_0(x), u_1(x) \in C^2[0,1],\ g_i(t) \in C^2[0,T], i = 1,2,...,n,\ a_0 > 0, a_1 < 0$.

Тогда система (20), (21) и (22) имеет единственное решение $v(t,x), v_x(t,x), \varphi_i(t), i = 1,2,...,n$ в пространстве $C^{0,1}(G) \times C_n[0,T]$ где $C_n[0,T]$- пространство n-мерных вектор функций с элементами из $C[0,T]$.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда обратная задача (1) – (4) имеет единственное решение $u(t,x), \varphi_i(t), (i = 1,2,...,n)$ в пространстве $C^{2,2}(G) \times C_n[0,T]$.

Литература:

1. Asanov A., Atamanov E.R. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations. - Netherlands: VSP, Utrecht, 1997. - 152 p.
2. Асанов А., Атаманов Э.Р. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения. - Сиб. матем. журнал. - 1995. Т. 36. - №4. - С. 752-762.
3. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - С. 183.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - С. 457.
5. Лаврентьев М.М. О некорректных задачах математической физики. - Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
6. Матанова К.Б. Обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Труды международной научно-теоретической конференции "Проблемы образования, науки и культуры в начале 21 века". 2001. Вып. 4. - С. 94-100.
7. Каденова З.А. Регуляризация линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях // Известия вузов, №7, 2012 г. - С. 5.

Рецензент: д.ф.-м.н. Турсунов Д.