ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Бекетаева А.О.

СОККУ УРУУЧУ ТОЛКУНДАР МЕНЕН ЖОГОРКУ ҮНДҮН АГЫМЫНЫН СТРУКТУРАСЫНА ЧЕК АРАЛЫК КАТМАРДЫН КАЛЫҢДЫГЫНЫН ТААСИРИ

Бекетаева А.О.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧОЙ СТРУИ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

A.O. Beketaeva

STUDYING OF THE INTERACTION OF TRANSVERSE JET WITH SUPERSONIC FLOW

УДК: 532.526

Навье-Стокстун теңдемесинин Фавру боюнча орточо негизинде, жабык $k-\omega$ үлгүсү үч өлчөмдүү жогорку үндүн агымын, каналдын капталы менен тегерек агуунун симметриялык перпендикулярдык толушу менен турбуленттик үлгүлөнөт. Баштапкы теңдеменин чыгарылышы ENO- схеманын негизинде тургузулган алгоритмдин жардамы менен иш жүзүнө ашат. Агымдын топтолуп агышы менен агуу убагындагы өз ара аракеттенишүүдө куюн сыяктуу структуранын келип чыгуу механизми изилденген. Белгилүү беш куюндан тышкары эсептелинбеген параметрлерди жогорулатуу менен кошумча куюндун түзүлгөндүгү табылган. Агуунун алдында алынган ашыкча басым эксперименттик далилдөөлөр менен канаттандыраарлык мааниге ээ болгон.

Негизги сөздөр: *сандык үлгүлөө, жогорку үндүн агышы, бүтүндөй газ, чек аралык катмар, Навье-Стокстун теңдемеси, эсептелинбеген параметр, сокку берүүчү толкундар.*

На основе осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых $k-\omega$ моделью турбулентности моделируется трехмерное сверхзвуковое течение с симметричным перпендикулярным вдувом круглых струй со стенок канала. Решение исходных уравнений, осуществляется с помощью алгоритма, построенного на основе ENO-схемы. Изучен механизм возникновения вихревых структур при взаимодействии струи с набегающим потоком. Выявлено, что с увеличением параметра нерасчетности помимо известных пяти вихрей, формируются дополнительные вихри. Получено удовлетворительное согласие полученного избыточного давления перед струей с экспериментальными данными.

Ключевые слова: *численное моделирование, сверхзвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье-Стокса, параметр нерасчетности, ударная волна.*

The three-dimensional supersonic turbulent flow with a symmetrical circular transverse jets injection to the channel is numerically simulated. The Favre averaged Navier-Stokes equations are solved by the algorithm, based on ENO-scheme. The mechanism of occurrence of vortex structures in the jet interaction flow field is studied. It was found that with increasing pressure ratio parameter in addition to the five known vortices form more vortices. A satisfactory agreement the pressure distribution on the wall with experimental data is obtained.

Key words: *numerical modeling, supersonic flow, perfect gas, boundary layer, Navier-Stokes equations, pressure ratio, the shock wave.*

Введение

В течении ряда последних лет проблеме взаимодействия между сверхзвуковым потоком и вдуваемой в него поперечной газовой струей уделялось особое внимание, особенно при изучении течений, возникающих в различных технологических приложениях. Большинство исследований сводятся в основном к определению усиления реактивной силы струи в результате ее взаимодействия со сверхзвуковым набегающим потоком и внешним пограничном слоем. Сравнительно мало внимания уделяется исследованию поведения и структуры самой струи. Целый ряд работ посвящен исследованию поперечного вдува струи с умеренными числами нерасчетности и физическая картина области взаимодействия достаточно хорошо изучена [1-9]. Однако ряд последних исследований, касающихся течений с большими параметрами нерасчетности, например [10], где отношение статического давления в струе к полному давлению потока равнялось 532, показали, что при истечении газовой струи появляются дополнительные вихри. Суммарная вихревая картина, возникающая при поперечном вдуве струи в набегающий поток, описанная в работе [10], иллюстрируется на рисунке 1. На графике показано сечение yz за струей, здесь видна структура, состоящая из пяти пар противоположно вращающихся вихрей. Вихри (1) и (3) формируются в зоне смешения между набегающим потоком и струей, пара вихрей (2) формируется за счет столкновения струи, проходящей через диск Маха и набегающего потока. Пара вихрей (4) образуются в результате перетекания потока над бочкообразной структурой. Подковообразный вихрь(5) возникает при наличии большого градиента давления перед струей и как следствие отрыва потока. Таким образом, полученные результаты при различных значениях отношений давления в потоке и в струе существенно отличаются друг от друга и исследование формирования вихревой структуры вдуваемой струи, в зависимости от больших параметров нерасчетности, является весьма интересной и актуальной задачей.

Целью исследования является численное моделирование вдува круглой звуковой струй перпендикулярно сверхзвуковому потоку в прямоугольном канале и изучение механизма возникновения вихревых структур в самой струе и за струей в зависимости от параметра нерасчетности. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки.

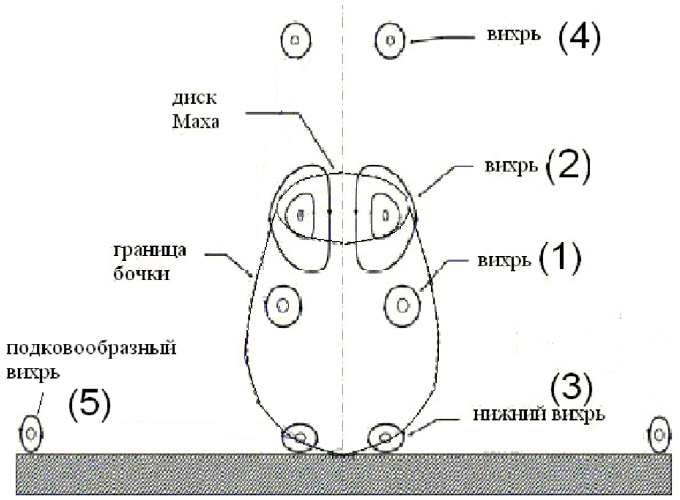


Рисунок 1 - Схема течения.

Постановка задачи

Исходной является система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial z}+\frac{\partial(G-\boldsymbol{G}_v)}{\partial y}=S \qquad (1)$$

компоненты векторов U, E, F, G определяются выражениями:

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\\ \rho k\\ \rho\omega\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+P\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+Ð)u\\ \rho uk\\ \rho u\omega\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+P\\ (E_t+Ð)w\\ \rho wk\\ \rho w\omega\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+P\\ \rho vw\\ (E_t+Ð)v\\ \rho vk\\ \rho v\omega\end{pmatrix},$$

а компоненты $\boldsymbol{E}_v,\ \boldsymbol{F}_v,\ \boldsymbol{G}_v$ связаны с вязкими напряжениями:

$$\boldsymbol{E}_v=\left(0,\quad \tau_{xx},\quad \tau_{xy},\quad \tau_{xz},\quad u\tau_{xx}+v\tau_{xz}+w\tau_{xz}-q_x,\frac{1}{\mathrm{Re}}(\mu_l+\sigma_k\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x},\frac{1}{\mathrm{Re}}(\mu_l+\sigma_\omega\mu)\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{x}}\right)^T$$

$$\boldsymbol{F}_v=\left(0,\quad \tau_{xz},\quad \tau_{yz},\quad \tau_{zz},\quad u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}-q_z,\frac{1}{\mathrm{Re}}(\mu_l+\sigma_k\mu_t)\frac{\partial k}{\partial z},\frac{1}{\mathrm{Re}}(\mu_l+\sigma_\omega\mu)\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{z}}\right)^T$$

$$\boldsymbol{G_v} = \left(0,\quad \tau_{xy},\quad \tau_{yy},\quad \tau_{yz},\quad u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, \frac{1}{\mathrm{Re}}\mu_l + \sigma_k \mu_t \frac{\partial k}{\partial y}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\mu_l + \sigma_\omega \mu\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{y}}\right)^T$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\left(2u_x - w_z - v_y\right),\quad \tau_{zz} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\left(2w_z - u_x - v_y\right),\quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{\mathrm{Re}}\left(2v_y - u_x - w_z\right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_t}{Re}\left(u_z + w_x\right)\quad,\quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu_t}{Re}\left(u_y + v_x\right),\qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu_t}{Re}\left(w_y + v_z\right),$$

$$q_x = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 \mathrm{Pr}\mathrm{Re}}T_x\,,\quad q_y = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 \mathrm{Pr}\mathrm{Re}}T_y,\quad q_z = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 \mathrm{Pr}\mathrm{Re}}T_z\,.$$

Вектор дополнительных членов имеет следующий вид:

$$\vec{\boldsymbol{S}} = \left(0,\quad 0,\quad 0{,}0{,}0,\left(P_k - \beta^* \rho\omega k\right),\left(\gamma\rho P_k / \mu_t - \beta\rho\omega^2\right)\right)^T$$

где $$P_k = \mu_t\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\rho k\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\quad \text{где } i,j,k = 1{,}2{,}3$$

Константы принимают следующие значения:

$$\sigma_k = 0.5\,, \sigma_\omega = 0.5\,, \beta^* = 0.09\,, \beta = 0.075\,, \gamma = 5/9\,.$$

здесь k,ω – кинетическая энергия турбулентности и скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. P_k - член генерации турбулентности.

Система (1) замкнута с помощью алгебраической $k-\omega$ модели турбулентности Вилкокса [11] где турбулентная вязкость определяется по формуле $\mu_t = \dfrac{\rho k}{\omega}$.

Для давления и температуры запишутся следующие выражения:

$$P = (\gamma-1)\left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2\right)\right],$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v}\right)\left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2\right)\right],\quad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2}$$

Здесь t - время, u,w,v - компоненты скорости потока в продольном и поперечных направлениях, ρ - плотность, $Đ$ - давление, T - температура, c_v - теплоемкость при постоянном объеме, γ - показатель адиабаты, M_0 и M_∞ - числа Маха струи и потока, μ_t - коэффициент турбулентной вязкости, 0 - отнесен к параметрам струи, ∞- к параметрам потока.

Исходная система (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе $u_\infty,\rho_\infty,T_\infty$, давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является диаметр круглого отверстия.

Граничные условия имеют следующий вид:

на входе задаются параметры потока

$$u = 1\,,\ v = 0\ \ w = 0\,,\ \rho = 1\,,\ T = 1 \qquad\qquad x = 0\,,\quad 0 \le y \le H_y\,,\ 0 \le z \le H_z$$

Начальные данные для k,ω параметров определялись с использованием алгебраической модели турбулентности Болдуина – Ломакса по известным осредненным физическим параметрам входного потока. Используя соотношение $P_k = \beta^* \rho\omega k$ начальное распределение турбулентных параметров примет вид

$$k = k_\infty\,, \text{ где } k_\infty = \frac{\mu_{tB-L}}{\rho \mathrm{Re}\sqrt{\beta^*}}\sqrt{\frac{P_k}{\mu_{tB-L}}}$$

$$\omega = \omega_\infty\,,\quad \omega_\infty = \frac{\rho k}{\mu_{tB-L}\mathrm{Re}}$$

на нижней стенке

$$u = 0\,,\ \ v = 0\,, w = 0\,,\ \ \frac{\partial T}{\partial z} = 0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \qquad\qquad z = 0\,,\quad 0 < x \le H_x\,,\quad 0 \le y \le H_y$$

Для параметров $k - \omega$ модели турбулентности на стенке задавались следующие граничные условия

$$k = 0\,;\qquad \omega = \frac{6\mu}{0.075\rho(\Delta y_1)^2}$$

на струе

$$u = 0\,,\ \ v = 0\,,\ T = 0.6\ \ w = \sqrt{T} M_0 / M_\infty\,,\ \ P_0 = nP_\infty\,,\qquad z = 0\,,\quad \left|x^2 + y^2\right| \le R$$

Вблизи стенки задается пограничный слой продольная составляющая скорости аппроксимируется степенным законом

на верхней границе условие симметрии,

$$w = 0\,;\ \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0\,;\ \frac{\partial v}{\partial z} = 0\,;\ \ \frac{\partial T}{\partial z} = 0\,;\frac{\partial k}{\partial z} = 0\,;\ \ \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \qquad\qquad z = H_z\,,\quad 0 < x \le H_x\,,\quad 0 \le y \le H_y$$

на боковых границах

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \qquad\qquad y = 0\,,\ y = H_y\,, 0 < x \le H_x\,, 0 \le z \le H_z$$

где H_x -длина, H_z - высота, H_y - ширина расчетной области, R - радиус круглого отверстия.

на выходной границе задается условие неотражения [12].

Метод решения

В настоящее время для решения таких сложных задач широко применяются TVD схемы, ENO, WENO схемы. В работе [13] авторы развили ENO-схему на основе идеи метода Годунова и показали применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Для решения поставленной задачи ENO схема обобщается на трехмерный случай. Для более точного учета течения в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне струи, вводится сгущение сетки с помощью преобразований

$$\xi = \xi(x),\quad \eta = \eta(z),\quad \zeta = \zeta(y). \tag{2}$$

При этом уравнения (3.1) в обобщенных координатах запишутся в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}}{\partial \zeta} \tag{3}$$

где $\tilde{U} = \frac{1}{J}\vec{U}\,,\ \tilde{E} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right)\vec{E}\,,\ \tilde{F} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)\vec{F}\,,\ \tilde{E}_{v2} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right)\vec{E}_{v2}\,,\ \tilde{E}_{vm} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right)\vec{E}_{vm}\,,$

$$\tilde{F}_{v2} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)\vec{F}_{v2}\,,\ \tilde{F}_{vm} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)\vec{F}_{vm}\,,\ \tilde{G}_{v2} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)\vec{G}_{v2}\,,\ \tilde{G}_{vm} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)\vec{G}_{vm}\,,$$

$J = \frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,z,y)}$ - якобиан преобразования.

$A = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{U}}\,,\ B = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}\ ,\ Q = \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}}$ - матрицы Якоби.

В соответствии с принципом построения ENO- схемы, исходная система уравнений будет формально представляется следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right)\frac{\partial \vec{E}^m}{\partial \xi} + \left(\hat{B}^+ + \hat{B}^-\right)\frac{\partial \vec{F}^m}{\partial \eta} + \left(\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-\right)\frac{\partial \vec{G}^m}{\partial \zeta} -$$

$$-\left[\frac{\partial(\tilde{E}_{v2} + \tilde{E}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F}_{v2} + \tilde{F}_{vm})}{\partial \eta} - \frac{\partial(\tilde{G}_{v2} + \tilde{G}_{vm})}{\partial \zeta}\right] = 0$$

(5) здесь $\vec{E}^m = \widetilde{E} + \vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi$, $\vec{F}^m = \widetilde{F} + \vec{E}_\eta + \vec{D}_\eta$, $\vec{G}^m = \widetilde{G} + \vec{E}_\zeta + \vec{D}_\zeta$ - модифицированные потоки на узловых точках (*i,j*), состоящих из исходных конвективных векторов ($\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$) и добавочных членов высокого порядка точности ($\vec{E}_\xi, \vec{D}_\xi$, $\vec{E}_\eta, \vec{D}_\eta, \vec{E}_\zeta, \vec{D}_\zeta$) ,

Одношаговая конечно-разностная схема для интегрирования по времени будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{U}_t^{n+1} + \Delta t \left[\left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A_\xi^n \, \widetilde{U}^{n+1} \right) - \frac{\partial \widetilde{E}_{v21}^{\,n+1}}{\partial \xi} + \left(\hat{B}^+ + \hat{B}^-\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_\eta^n \, \widetilde{U}^{n+1} \right) - \frac{\partial \widetilde{F}_{v21}^{\,n+1}}{\partial \eta} + \right.$$

$$\left. + \left(\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(Q_\zeta^n \, \widetilde{U}^{n+1} \right) - \frac{\partial \widetilde{G}_{v21}^{\,n+1}}{\partial \zeta} \right] = \widetilde{U}^n + \Delta t \left[\frac{\partial \widetilde{E}_{v22}^{\,n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widetilde{F}_{v22}^{\,n}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widetilde{G}_{v22}^{\,n}}{\partial \zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left(2\widetilde{E}_{vm}^n - \widetilde{E}_{vm}^{n-1} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\widetilde{F}_{vm}^n - \widetilde{F}_{vm}^{n-1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(2\widetilde{G}_{vm}^n - \widetilde{G}_{vm}^{n-1} \right) \right] - \qquad (4)$$

$$- \Delta t \left[\left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi \right) + \left(\hat{B}^+ + \hat{B}^-\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\vec{E}_\eta + \vec{D}_\eta \right) + \left(\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\vec{E}_\zeta + \vec{D}_\zeta \right) \right]$$

где $A_\xi = \xi_x A$, $B_\eta = \eta_z B$, $Q_\zeta = \zeta_y Q$, $A = \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{U}}$, $B = \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}$, $Q = \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}}$ - матрицы Якоби

$$\hat{A}^{\pm} = R \hat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R \left(\frac{1 \pm sign\left(\Lambda_\xi\right)}{2} \right) R^{-1}, \ \hat{B}^{\pm} = T \hat{\Lambda}_\eta T^{-1} = T \left(\frac{1 \pm sign\left(\Lambda_\eta\right)}{2} \right) T^{-1}$$

$$\hat{Q}^{\pm} = S \hat{\Lambda}_\zeta S^{-1} = S \left(\frac{1 \pm sign\left(\Lambda_\zeta\right)}{2} \right) S^{-1}.$$

причем $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$, I - единичная матрица.

Члены, содержащие вторые производные $\widetilde{E}_{v2}$, $\widetilde{F}_{v2}$, $\widetilde{G}_{v2}$, представляются в виде суммы двух векторов: $\widetilde{E}_{v2}^{n+1} = \widetilde{E}_{v11}^{n+1} + \widetilde{E}_{v12}^{n}$ (вектора $\widetilde{F}_{v2}$, $\widetilde{G}_{v2}$ аналогично)

где вектор $\widetilde{E}_{v11}^{n+1}$ имеют следующий вид:

$$\widetilde{E}_{v11}^{n+1} = \frac{\mu_t \xi_x}{ReJ} \left[0, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T ,$$

а вектор $\widetilde{E}_{v12}^n$ содержат оставшиеся диссипативные функции вида:

$$\widetilde{E}_{v12}^n = \frac{\xi_x^2}{ReJ} \left[0,0,0, \left[\left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]^n \right]^T ,$$

Для векторов потоков со смешанными производными используется аппроксимация по явной схеме при равномерном шаге по времени:

$$\widetilde{E}_{vm}^{n+1} = 2\widetilde{E}_{vm}^n - \widetilde{E}_{vm}^{n-1} + O\left(\Delta t^2\right)$$

После факторизации выражения (4) получается следующее равентсво:

$$\left\{ I + \Delta t \left[\left(\hat{A}^+ + \hat{A}^- \right)^n \frac{\partial}{\partial \xi} A_\xi^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \xi} \widetilde{\mu}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\widetilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times$$

$$\left\{ I + \Delta t \left[\left(\hat{B}^+ + \hat{B}^- \right)^n \frac{\partial}{\partial \eta} B_\eta^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \eta} \widetilde{\mu}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\widetilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times$$

$$\times\left\{I+\Delta t\left[\,(\,\hat{Q}^{+}+\hat{Q}^{-}\,)\,\frac{\partial}{\partial\zeta}Q_{\zeta}^{n}\bullet-\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\widetilde{\mu}_{\zeta}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{1}{\widetilde{U}_{1}}\bullet\right]\right\}\widetilde{U}^{n+1}=RHS \qquad (5)$$

где оператор $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}A_{\xi}^{n}\bullet\right\}\widetilde{U}^{n+1}=\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(A_{\xi}^{n}\,\widetilde{U}^{n+1}\right)$, $\widetilde{\mu}_{\xi}=\dfrac{\mu\xi_{x}^{2}}{Re\,J}$, $\widetilde{\mu}_{\eta}=\dfrac{\mu\eta_{z}^{2}}{Re\,J}$, $\widetilde{\mu}_{\zeta}=\dfrac{\mu\zeta_{y}^{2}}{Re\,J}$

RHS - правая часть выражения (4).

При аппроксимации производных в конвективных членах использован следующий оператор:

$$\left.\left(\hat{A}^{-}+\hat{A}^{+}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}f\right|_{ij}=\frac{\hat{A}_{i+1/2j}^{-}\left(f_{i+1j}-f_{ij}\right)+\hat{A}_{i-1/2j}^{+}\left(f_{ij}-f_{i-1j}\right)}{\Delta\xi}$$

Аппроксимация членов содержащих добавочные вектора высокого порядка подробно описана в работе [13]. При аппроксимации производных в диффузионных членах использованы центрально- разностные операторы со вторым порядком точности. Решение системы (5), осуществляется методом расщепления относительно вектора $\widetilde{U}$ матричной прогонкой.

Анализ результатов

Расчет производился на разнесенной сетке размером $201\times101\times101$ с шагами по пространственным координатам $\Delta x=0.1\div 0.5$, $\Delta z=0.06\div0.25$, $\Delta y=0.1\div0.5$, шаг по времени $\Delta t=0.025$. Исследовалось обтекание сверхзвуковым потоком с параметрами $Re=1.87*10^{7}$, $\Pr=0.9$, $M_{\infty}=3$ звуковой струи совершенного газа с диаметром отверстия $d=1.4cm$ и с параметром нерасчетности $n=50$, $x_{0}=10$, $y_{0}=15$– расстояние от входной границы до центра струи в калибрах, H_{x}-30, H_{z} - 15, H_{y} - 30 калибров.

Для апробации разработанного метода было проведено сравнение численных результатов с опытными данными работы [1] для параметра нерасчетности $n=40$. На рисунке 2 представлены результаты распределения давления P/P_{∞} на нижней стенке в плоскости симметрии (сплошная линия – численные результаты, «°°°°» – эксперимент работы [1]). Здесь начало координат выбранной системы совпадает с центром отверстия для вдува. По оси абцисс отложена величина, $x_{1}=(\,X-\frac{1}{2}d\,)-L_{1}$, где L_{1} - расстояние от передней точки струи до начала повышения давления а направление x_{1} совпадает с вектором скорости набегающего потока. Как известно, перед струей, вследствие торможения набегающего потока давление повышается и образуются области с различными градиентами давления, что наблюдается на графике. Из сравнения полученного результата с данными работы [1] следует качественное удовлетворительное согласие результатов расчетов с измерениями опытов.

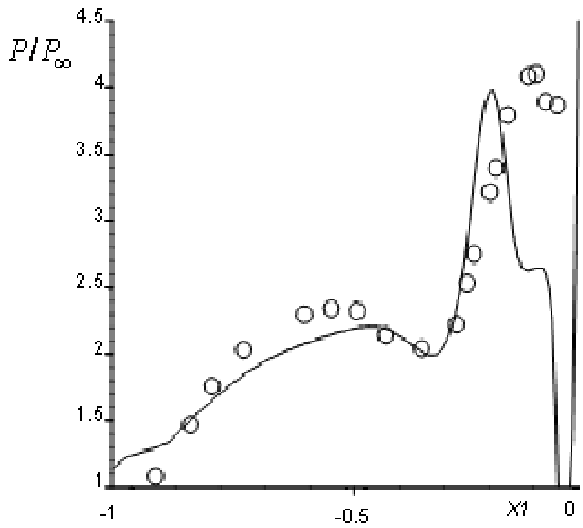


Рисунок 2

Далее был выполнен численный эксперимент по изучению взаимодействия и смешения струи с потоком. Для этого рассматривался вдув струи с параметром нерасчетности $n=50$. Картина полей вектора скорости в области вдува струи в плоскости zy дает представление о механизме формирования всех пяти вихревых структур, которые были описаны ранее. Так в зоне за струй т.е на расстоянии $x = 11.40$ калибров от начала расчетной области (рисунок 3а, слева вектор скорости, справа линии тока) наблюдается вдув струи и начало возникновения вихря (1), который формируется в зоне смешения между боковой стороной вдуваемой струей и основным потоком и увеличивается по мере продвижения вниз по потоку. Вихрь (1) начинает зарождаться в области пограничного слоя, который находиться между боковой стороной струи и областью возвратного течения перед струей. Центр вращения вихрей расположен вне расширяющейся струи, следовательно, вихри образуются в слое смешения струи и потока.

На рисунке 3б на расстоянии $x = 14.70$ вниз по потоку показано возникновение вихря (2), который формируется вниз по потоку от вдува струи и вносит основной вклад в смешение струи и потока. Вихрь сформирован в результате того, что замедленный поток струи сразу после прохождения диска Маха, вступает в контакт с высокоскоростным набегающим потоком. На рисунке 3в (распределения местного числа Маха на линии симметрии) на уровне $x = 14.70$ можно наблюдать дозвуковую область в месте зарождения вихря. На графиках 3б также можно наблюдать задний нижний вихрь (3), который расположен у поверхности пластины и у линии симметрии. Эта пара вихрей также формируется в зоне смешения между струей и потоком, но только существенно в области пограничного слоя. Его возникновение связано с тем, что непосредственно за струей у стенки образуется область пониженного давления, куда и устремляется основной поток. За счет бокового перетекания второго вихря из системы вихрей перед струей у поверхности плоской пластины вокруг бочки формируется вихрь (3). При этом поток, который формирует ядро этого вихря, двигается от линии симметрии, поскольку после вдува струя расширяется.

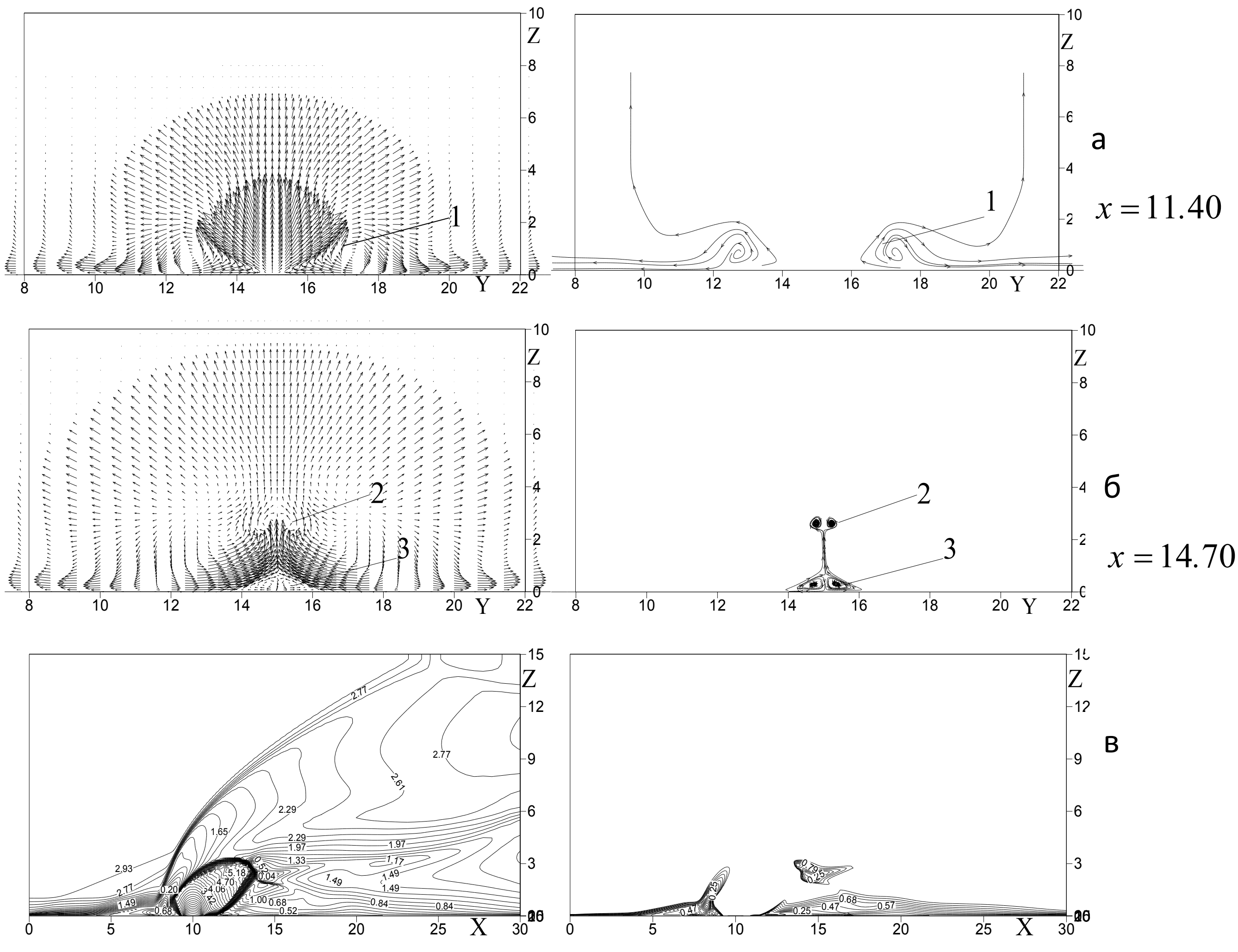


Рисунок 3.

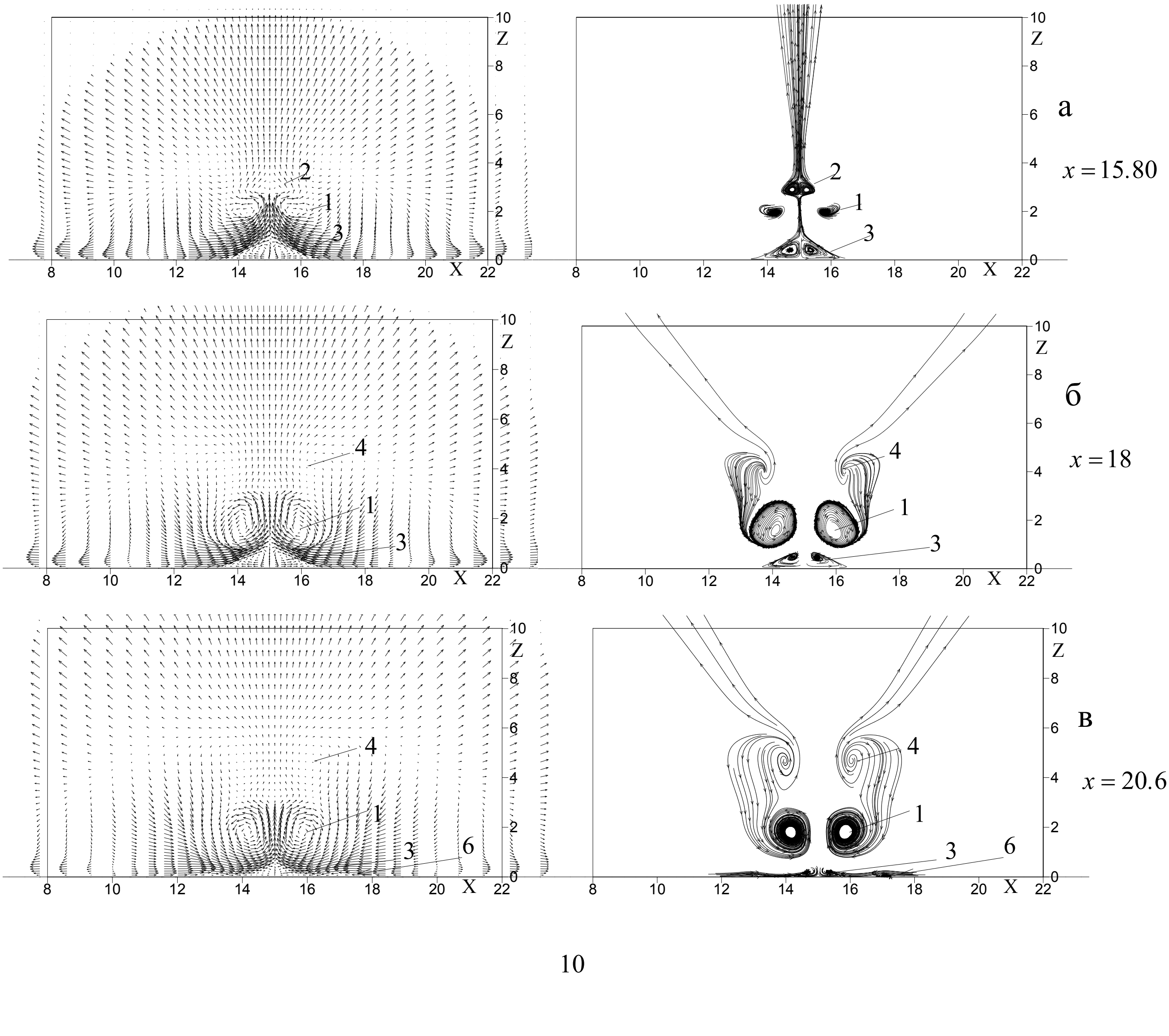
Далее на рисунке 4а в сечении $x = 15.80$ показана картина вихревой системы, уже состоящей из двух пар противоположно-вращаюшихся вихрей (1) и (2) (слева вектор скорости, справа линии тока). Здесь же на графике виден вихрь 3, который существенно увеличился в размерах. Из эксперимента следует, что в сечении

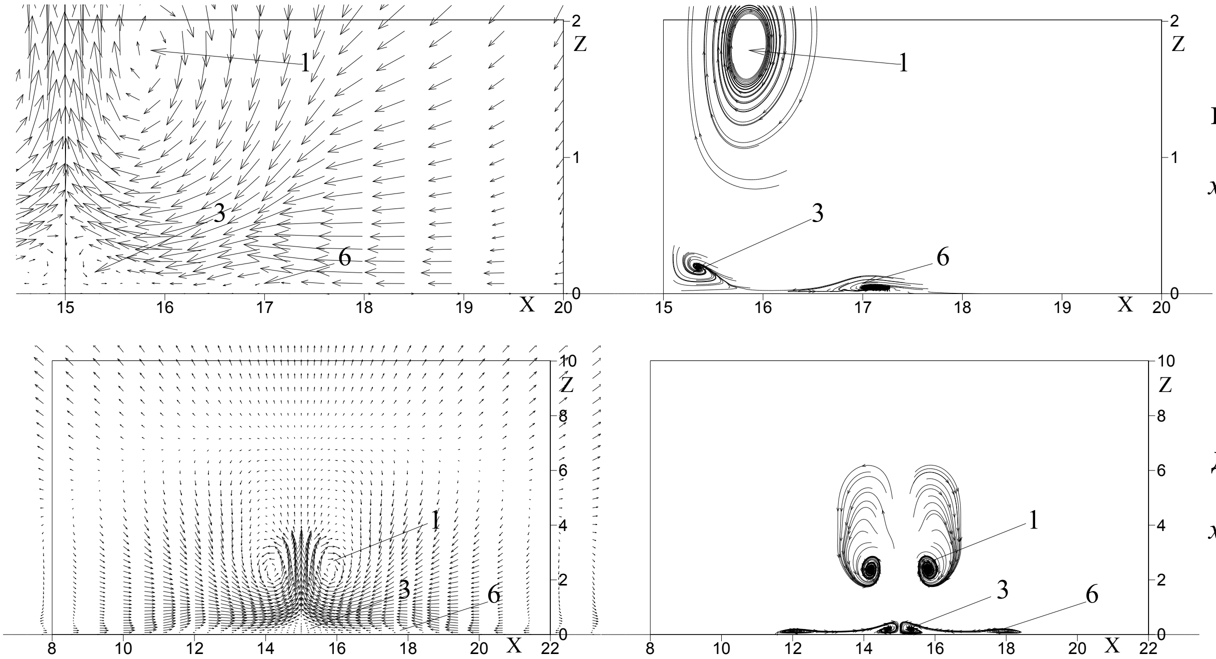
$x = 18$ (рисунок 4б) две пары вихрей (1) и (2) сливаются в один вихрь, его направление вращения совпадает с вращением вихря (1) и он просматривается вплоть до конца расчетной области. Также на уровне $x = 18$ можно наблюдать возникновение пары вихрей (4), которая образуются в результате перетекания потока над бочкообразной структурой. Как было замечено в работе [10] верхний вихрь более слабый, чем другие и поэтому может трудно определяться в численных результатах. Численный эксперимент показал, что появление данного вихря зависит от интенсивности смешения струи и потока.

Численные результаты показали, что вниз по потоку центр вращения вихря (1) смещается к стенке. Это факт можно объяснить тем, что на данном уровне происходит прилипание струи к плоскости пластины, в результате чего формируется новая пара вихрей вблизи стенки. Тем самым подтверждается предположение, сделанное в работе [1], о том, что, вероятно, между струей и областью ее прилипания к стенке существует своего рода каверна, в которой возможно появление двух вихрей с противоположным направлением вращения. Так, на расстоянии $x = 20.6$ (рисунки 4в-г) видно наличие новой пары вихрей (6), причем направление вращения вихря совпадает с вращением вихря (3). Так же на этом рисунке показаны вихри (1) и (4). Далее, в сечении $x = 24$ (рисунок 4д) хорошо просматривается вихрь (6), здесь он находится на значительном расстоянии от линии симметрии, а вихрь (4) уже не наблюдается. Численные эксперименты показывают, что при $x = 28$ вихри (6) и (3) объединяются.

Заключение

Численно исследовано трехмерное сверхзвуковое турбулентное течение с симметричным поперечным вдувом круглых струй через щели на стенках с использованием методики расчета осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для совершенного газа. Изучен механизм образования пяти пар симметричных вихрей в результате взаимодействия набегающего потока с вдуваемой струей с большими параметрами нерасчетности ($n = 50$). Выявлено, что в результате взаимодействия струи и обтекающего ее потока появляется пара вихрей (4), а также происходит дополнительный отрыв у стенки, т.е. формируется вихрь (6).





г

$x = 20.6$

д

$x = 24$

Рисунок 4

Литература:

1. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С.97-102.
2. Авдуевский В.С., Медведев К.И., Полянский М.Н. Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 5. С.193-197.
3. Драммонд Д.Ф., Вайднер Э.Х. Численный метод расчета в канале ПВРД // Аэрокосмическая техника. 1983. Т.1, № 4. С.42-49.
4. Шунь Дж.Ш., Юнь С. Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU- факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосмическая техника. 1990. № 10. С.102-113.
5. Grasso F., Magi V., Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // AIAA Journal. 1995. Vol.33, № 1. P.56-62.
6. Chenault C.F., Beran P.S. Numerical Investigation of Supersonic Injection Using a Reynolds Stress Turbulence Model // AIAA Journal. 1999. Vol.37, № 10. P.1257-1269.
7. Sun De- chaun, HU Chun-bo, CAI Ti-min Computation of Supersonic turbulent Flowfield with Transfer Injection // Applied Mathematics and Mechanics 2002. Vol. 23, №1.
8. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т.45, №3. С.72-80
9. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Численное исследование пространственного сверхзвукового течения совершенного газа при наличии поперечного вдува струй // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т.52, №6. С.1-10
10. Viti V., Neel R., Schetz J. "Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field" // Physics of Fluids, Vol. 21, April, 2009.
11. D.C. Wilcox, A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-share flow // AIAA paper 93-2905,1993.
12. Poinsot T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // Journal of Computational Physics. 1992. № 101. P.104-129.
13. Бекетаева А.О. Найманова А.Ж. Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси. // Вычислительные технологии , 2007. Т.12, № 4. С. 17-25

Рецензент: д.ф.-м.н. Жайнаков А.Ж.