Байзаков А.Б., Айтбаев К.А.

ИРРЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨЛҮҮ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРА ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Байзаков А.Б., Айтбаев К.А.

О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

A.B. Baizakov, K.A. Aitbaev

ON A SOLUTION OF VOLTERRA EQUATIONS WITH IRREGULAR SINGULARITIES

УДК: 513.83

Иррегулярдык өзгөчөлүү Вольтерра интегралдык теңдемелер системасынын чыгарылышынын жашашынын жетиштүү шарттары аныкталды жана ал үчүн асимптотикалык формулалар алынды

***Негизги сөздөр:** кысып чагылтуу принциби, Вольтерра интегралдык теңдемелери, интегралдык оператор, иррегулярдык өзгөчө чекит.*

Установлены достаточные условия существования решения системы интегральных уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью и получены для него асимптотические формулы.

***Ключевые слова:** принцип сжатых отображений, интегральные уравнения Вольтерра, интегральный оператор, иррегулярная особая точка.*

Establish sufficient conditions for the existence of solutions of Volterra integral equations with irregular singularities and obtained for him the asymptotic formula.

***Key words:** principle of contraction mappings, integral equations Volterra integral operator, irregular singular point.*

Многие важные задачи физики, биологии, экономики и т.д. сводятся к решению интегральных уравнений Вольтерра с особыми точками. Аналитическая теория таких уравнений была развита в работах [1,2]. Тем не менее, что многие важные вопросы асимптотической и аналитической теории интегральных уравнений Вольтерра с особой точкой до сих пор мало изучены. В частности: проблема асимптотической и аналитической структуры решений уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью. В этой работе построены явные решения систем линейных уравнений Вольтерра.

Рассмотрим систему уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью в точке $t = 0$ вида:

$$t^q u(t) = \int_0^t p(t,s)K(t,s)u(s)ds, \quad (0 < t < T), \tag{1}$$

где $u(t)-$ искомая $n-$мерная векторная функция, $K(t,s)-$ квадратная матрица размерности $n \times n$; $p(t,s)-$ такая положительная, однородная $q-1$ степени функция, что функция $\varphi(\tau) = p(1,\tau)$ суммируемая на [0, 1], q >1 - целое число. На ядро $K(t,s)$ будут налагаться условия гладкости.

Введем интегральные операторы вида:

$$Au = \int_0^t \psi(\tau)K(t,t\tau)u(t,\tau)d\tau \tag{2}$$

Ясно, что для нормы оператора *A* в пространстве *C* [0,*T*], получаем

$$\|A\| = \max_{0<s<t<T} \|K(t,s)\| \int_0^t \psi(\tau)d\tau \tag{3}$$

Введем еще обозначения

$$\varphi_k = \int_0^t \tau^k \varphi(\tau)d\tau, \quad M_k = \int_0^t \tau^k \varphi(\tau)\ln\tau d\tau, \quad (k = 0,1,2,...)$$

Сделаем в (1) замену $s = t\tau$. Тогда получим

$$u(t)=\int_0^t \varphi(\tau)K(t,t\tau)u(t,\tau)d\tau . \tag{4}$$

Построение решений.

Будем искать решения уравнения (4) в виде:

$$u(t)=p(t)\ln t+t^k u_k \ln t+q(t)+t^k v_k(t), \tag{5}$$

где

$$p(t)=a_0+ta_1+t^2a_2+...+t^{k-1}a_{k-1,}$$

$$q(t)=b_0+tb_1+t^2b_2+...+t^{k-1}b_{k-1}.$$

Подставляя $u(t)$ из (5) в (4) и группируя член, содержащие $\ln(t)$ и не содержащие $\ln(t)$, получаем

$$\begin{gathered}t^k u_k(\tau)\ln t+t^k v_k(t)=\ln(t)\left[\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)t^k\tau^k u_k(t\tau)d\tau \quad +\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)\times\right.\\ \left.\times p(t,\tau)d\tau-p(t)\right]+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)t^k\tau^k u_k(t\tau)\ln\tau d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)\times\\ \times t^k\tau^k v_k(t\tau)d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)p(t\tau)\ln\tau d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)q(t\tau)d\tau-q(t).\end{gathered} \tag{6}$$

Приравниваем слева и справа члены уравнения, содержащие множитель $\ln(t)$. Тогда

$$t^k u_k(t)=\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)p(t\tau)d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)t^k\tau^k u_k(t\tau)d\tau-p(t). \tag{7}$$

В дальнейшем мы найдем условия, при которых коэффициенты многочлена $p(t)$ можно подобрать так, чтобы функция

$$f(t)\equiv t^{-k}\left[\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)p(t\tau)d\tau-p(t).\right]$$

была непрерывной на отрезке [0, T].

Тогда уравнение (7) можно записать в виде

$$u_k(t)=Au_k(t)+f(t), \tag{8}$$

где *A* оператор в виде (2) с функцией $\psi(\tau)=\tau^k\varphi(\tau)$. Из (3) получаем $\|A\|=\max\limits_{0<s<t<T}\|K(t,s)\|\varphi_k$.

Если $\varphi_k<\left\{\max\limits_{0<s<t<T}\|K(t,s)\|\right\}^{-1}$, то $\|A\|<1$ и следовательно, решение уравнения (8) в пространстве *C* [0, *T*] может быть найдено принципом сжатых отображений.

Считая, что $u_k(t)$ найденной, приравниваем в левой и правой части (6) члены, не содержащие $\ln(t)$.

$$\begin{gathered}t^k v_k(t)=\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)t^k\tau^k u_k(t\tau)\ln\tau d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)\times\\ \times t^k\tau^k v_k(t\tau)\ln\tau d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)q_k(t\tau)\ln\tau d\tau-q(t).\end{gathered} \tag{9}$$

Если нам удается подобрать коэффициенты многочлена *q (t)* так, чтобы функция

$$g(t)=t^{-k}\left[\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)p(t\tau)\ln\tau d\tau+\int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)q(t\tau)d\tau-q(t)\right] \tag{10}$$

была непрерывной на отрезке [0, *T*], то уравнение (9) можно записать в виде

$$v_k(t) = Av_k(t) + \int_0^1 \varphi(\tau)K(t,t\tau)\tau^k u_k(t\tau)\ln\tau d\tau + g(t), \qquad (11)$$

где оператор A такой же, как в (8).

Следовательно, при условии $\varphi_k < \left\{\max_{0<s<t<T} \|K(t,s)\|\right\}^{-1}$ уравнение (11) может быть разрешено в пространстве $C[0, T]$ принципом сжатых отображений.

Таким образом, для нахождения решения уравнения (4), имеющего вид (5), нужно подобрать коэффициенты многочленов *p(t)* и *q(t)* так, чтобы функции *f(t)* и *g(t)* были непрерывными.

Определение коэффициентов многочленов *p(t), g(t).*

Аналогичная задача была рассмотрена в работе [1] для регулярной особой точки интегральных уравнений Вольтерра. В ней установлено следующие утверждения. Если

a) матрица *K(t,s)* имеет непрерывные производные по *t* до порядка k_0, где k_0 определяется из неравенства

$$\varphi_{k_0} < \left\{\max_{0<s<t<T} \|K(t,s)\|\right\}^{-1}; \qquad (12)$$

b) матрица $K(0,0)$ имеет собственный и присоединенные к нему векторы, отвечающие числу $\frac{1}{\varphi_0}$;

c) числа $\frac{1}{\varphi_i}$ $(i = 1,2,...,k_0 - 1)$; не являются собственными числами матрицы $K(0,0)$, то можно подобрать коэффициенты a_i, b_i $(i = \overline{1, k_0 - 1})$ многочленов $p(t)$, $q(t)$ так, чтобы они были непрерывными функциями на $[0, T]$.

Итак, нами доказана

Теорема. Если выполнены условия a), b), c); то существует решение уравнения (1) вида (5) с $k = k_0$, где $u_{k_0}(t)$ и $v_{k_0}(t)$ - непрерывные функции на $[0, T]$, $p(t)$ и $q(t)$ – полиномы степени не выше $k_0 - 1$.

Пример. Интегральное уравнение Вольтерра с иррегулярной особой точкой

$$t^2u(t) = -\int_0^t (2t - 6s)u(s)ds$$

имеет двухпараметричное решение

$$u = 6C_1t + 2C_2$$

В рассмотренном примере $K(t,s) \equiv 1, \quad \rho(t,s) = -2t + 6s$ - есть однородная функция степени 1.

Литература:

1. Беляева Е.В. О некоторых решениях уравнения Вольтерра с особенностью // Краевые задачи: Межвузовск. сб. науч. трудов. - Пермь, 1989. - С. 184-190.
2. Магницкий Н.А. Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем. - Москва: Наука, 1992. - 160 с.
3. Байзаков А.Б., Айтбаев К.А. Обобщенные решения интегральных уравнений // Тез. докл. межд. науч. конф., «Актуальные проблемы дифференц. уравнений и мат. физики». Алматы, 2005. – С.48.
4. Щерба А.З. Асимптотическое разложение решения интегрального уравнения Вольтерра // Матем. анализ. - Краснодар, 1971. - С. 85-97.
5. Щерба А.З. Голоморфные решения одного класса интегральных уравнений Вольтерра //Дифференц. уравнения. - 1974. - Т.10, №11. - С. 2079-2080.
6. Панов Л.И. Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка // Докл. АН Тадж. ССР. 1967. - Т. 10, №6.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.