ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Рысбайулы Б., Адамов А.А., Жуаспаев Т.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИОНАЛА

B. Rysbaiuly, T. Zhuaspaev

THE PROOF OF THE FUNCTIONAL MONOTONY

УДК: 519.6 (075.8)

В работе рассматривается доказательство одного из основных математических свойств численного метода идентификации обобщенного коэффициента теплоотдачи грунта. С использованием ранее доказанных априорных оценок доказывается монотонность минимизируемого функционала.

Ключевые слова: *итерационный метод, обобщенный коэффициент, монотонность, функционал, теплоотдача грунта.*

The paper deals with the proof of one of the basic mathematical properties of a numerical method for the identification of a generalized heat transfer coefficient of the soil. With the use of previously proved a priori estimates the monotony of minimizing functional is proved.

Key words: *iterative method, the generalized ratio, monotonicity, functionality, heat dissipation of the soil.*

Рассмотрим вспомогательную задачу, полученную в работе [3]

$$C\frac{\Delta\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\Delta\theta}{\partial z}), \tag{1}$$

$$\Delta\theta\big|_{t=0}=0,\ \Delta\theta\big|_{z=0}=0, \tag{2}$$

$$\lambda\frac{\partial\Delta\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+N_n\Delta\theta\big|_{z=H}=-\Delta N(\theta_{n+1}-T_b(t))_{z=H}. \tag{3}$$

Уравнение (1) умножим на $\Delta\theta(z,t)$ и интегрируем в области

$$Q^t=\{(z,t)\big|z\in(0,H),\ t\in(0,t),\ t\le T_{\max}\},$$

С учетом начально-граничных условий (2)-(3) выводится неравенство

$$\frac{1}{2}C\int_0^H(\Delta\theta)^2dz+\int_0^t\left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\Delta\theta}{\partial z}\right\|^2d\tau+N(n)\int_0^{t_{\max}}\left(\Delta\theta(H,\tau)\right)^2d\tau\le$$

$$\le\left|\Delta N\right|\int_0^{T_{\max}}\left|\theta(H,\tau;n+1)-T_b(\tau)\right|\cdot\left|\Delta\theta(H,\tau)\right|d\tau. \tag{4}$$

Ряд $\sum_n\frac{1}{n^{1+\mu}}$ сходится. Поэтому из неравенства (4) следует, что существуют $N_{\min}$ и $N_{\max}$, зависящие от начальных данных такие, что

$$0<N_{\min}\le N(n)\le N_{\max}<\infty. \tag{5}$$

Лемма 1. Если $\beta(n) = \dfrac{\beta}{n^{1+\mu}}\left(\dfrac{N(n)}{1+N(n)}\right)^3$, $\mu > 0$, то:

а) из итерационной формулы

$$N(n+1) = N(n) - \beta(n)\int_0^{t_{\max}}\left(\theta(H,t;n) - T_g(t)\right)\psi(H,t)\,dt \qquad (6),$$

приведенной в [4] следует ограниченность приближенного значения коэффициента обобщенной теплоотдачи $N(n+1)$, т.е. имеет место неравенство (5);

б) имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} N(n) = N.$.

Теперь, из оценок

$$\frac{C}{2}\|\theta\|^2 + \int_0^t \left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\|^2 d\tau + \frac{N}{2}\int_0^t \theta^2(H,t)\,d\tau \le C_1(1+N)$$

и

$$\frac{C}{2}\|\psi\|^2 + \int_t^{T_{\max}} \left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|^2 d\tau + \frac{N}{2}\int_t^{T_{\max}} \psi^2(H,\tau)\,d\tau \le C_2\frac{1+N}{N^2}$$

следует, что имеет место лемма.

Лемма 2.

Если $\theta_0(z) \in L_2(0,\ H),\ T_b(t), T_g(t) \in L_2(0,\ \mathrm{t}_{\max})$, то для случая $N(t) = N = const$ решений прямой задачи

$$C\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{7}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(z), \qquad \theta\big|_{t=0} = T_1, \tag{8}$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H} + N\theta\big|_{z=H} = NT_b(\mathrm{t}). \tag{9}$$

и сопряженной дифференциальной задачи

$$C\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0, \qquad \psi\big|_{t=T_{\max}} = 0 \tag{10}$$

$$\psi\big|_{z=0} = 0,\ \left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z} + N\psi\right)\bigg|_{z=H} = 2\left(\theta - T_g(t)\right)\big|_{z=H} \tag{11}$$

имеют место оценки

$$\max_t\|\theta\| + \int_0^t \left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\|^2 d\tau + \int_0^t \theta^2(H,\tau)\,d\tau \le C_4 < \infty,$$

$$\max_t\|\psi\|^2 + \int_0^t \left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|^2 d\tau + \int_0^t \psi^2(H,\tau)\,d\tau \le C_5 < \infty.$$

На основе леммы 1 и 2 выводится соотношение

$$\max_t \|\Delta\theta\|^2 + \int_0^t \left\| \sqrt{\lambda}\, \frac{\partial \Delta\theta}{\partial z} \right\|^2 d\tau + \int_0^t \left(\Delta\theta(H,\tau)\right)^2 d\tau \le C_6 \cdot (\Delta N)^2 .$$

$$\frac{C}{2}\|\theta\|^2 + \int_0^t \left\| \sqrt{\lambda}\, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|^2 d\tau + \frac{N}{2}\int_0^t \theta^2(H,t)d\tau \le C_1(1+N)$$

Из итерационного равенства (6) используя, леммы 1 и 2 выводим, что

$$\max_t \|\Delta\theta\|^2 + \int_0^t \left\| \sqrt{\lambda}\, \frac{\partial \Delta\theta}{\partial z} \right\|^2 d\tau + \int_0^t \left(\Delta\theta(H,\tau)\right)^2 d\tau \le C_7 \cdot \beta_n^2 \qquad (12)$$

Используя неравенство Коши преобразуем выражение

$$J\left(N\left(n+1\right)\right) - J\left(N\left(n\right)\right) = -\beta\left(n\right)\left(\int_0^{t_{\max}} \left(\theta\left(H,t;n\right) - T_g\left(t\right)\right)\psi\left(H,t\right)dt\right)^2 -$$

$$-\beta\left(n\right)\int_0^{t_{\max}} \left(\theta\left(H,t;n\right) - T_g\left(t\right)\right)\psi\left(H,t\right)dt \int_0^{t_{\max}} \psi\left(H,t\right)\Delta\theta\left(H,t\right)dt$$

следующим образом:

$$J_{n+1} - J_n + \frac{\beta(n)}{2}\left(\int_0^{t_{\max}} \left(\theta(H,t;n) - T_g(t)\right)\psi(H,t)dt\right)^2 \le \frac{\beta(n)}{2}\left(\int_0^{t_{\max}} \psi(H,\tau)\Delta\theta(H,\tau)d\tau\right)^2 .$$

Пусть

$$\int_0^{T_{\max}} \left(\theta(H,\tau;n) - T_g(\tau)\right)\psi(H,\tau)d\tau = B_n ,$$

тогда

$$J_{n+1} - J_n + \frac{\beta_n}{2}B_n^2 \le \frac{\beta_n}{2}\int_0^{t_{\max}} \psi^2(H,\tau)d\tau \cdot \int_0^{t_{\max}} \left(\Delta\theta^2(H,\tau)\right)^2 d\tau .$$

Используя (12) выводится неравенство

$$J_{n+1} - J_n + \frac{\beta_n}{2}(B_n^2 - C_8\beta_n^2) \le 0 .$$

Если $B_n \ne 0$, то из последнего неравенства следует, что

$$J_{n+1} - J_n < 0 .$$

Литература:

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена- Москва, машиностроение, 1988, 280 с.
2. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.
3. Жуаспаев Т.А. Сопряженная задача идентификации обобщенного коэффициента [Текст] / Т.А.Жуаспаев // Бишкек, Известия Вузов, №3, 2014, с. 19-21.
4. Жуаспаев, Т.А., Байманкулов, А.Т. Итерационная формула расчета обобщенного коэффициента теплообмена, Бишкек, Известия Вузов, №3, 2014, с. 29-30.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.