

Комилов Ф.С., Косимов И.Л.

**БАЛЫК КӨЛМӨСҮНҮН ЭКОСИСТЕМАСЫНЫН МАТЕМАТИКАЛЫК
МОДЕЛИН ИШТЕП ЧЫГУУСУ ЖӨНҮНДӨ**

Комилов Ф.С., Косимов И.Л.

**О РАЗРАБОТКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ
РЫБОВОДНОГО ПРУДА**

F.S. Komilov, I.L. Kosimov

**ON THE DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL
OF A FISHPOND ECOSYSTEM**

УДК: 577.472 574.5 (081)

Статья посвящена математическому моделированию экосистемы рыбоводного пруда. Состояние моделируемой экосистемы в каждый момент времени определяется концентрацией 15 фазовыми переменными. В модель рассматриваются 3 вида рыб-каarp, белый толстолобик и белый амур. Другие переменные выбраны в соответствии с кормовой базой рыб и учёта круговорота вещества в экосистеме. Входными функциями модели являются температура воды, солнечная радиация и 5 управляющие функции, характеризующие внесение корма и минеральных удобрений.

Ключевые слова: экосистема, рыбоводный пруд, моделирование, рыба, карп, белый толстолобик, белый амур.

The article is devoted to mathematical modeling of fishpond ecosystem. The situation ecosystem at each moment of time is defined concentration 15 phase variable. In models are considered 3 types of fish – carp, white silver carp and white amur. Other variable models are chosen in accordance with stern base of the fish and account of the rotation material in ecosystem. The Input function to models are temperature of the water, solar radiation and 5 controlling functions, characterizing contributing artificial stern and mineral fertilizers.

Key words: ecosystem, fishpond, modeling, fish, carp, silver carp, white amur.

Работа [1] посвящена исследованию и имитационному моделированию экосистемы рыбоводного пруда. Математическая модель этой экосистемы включает только два вида рыбы – белого толстолобика (*TL*) и карпа (*CR*). Излюбленным кормом белого толстолобика является фитопланктон, а карпа – бентосные организмы. Целью данной работы является математическое моделирование экосистемы рыбоводного пруда, где наряду с перечисленными рыбами, также выращивается и белый амур. В работе [2] обоснованы критерии выбора фазовых переменных такой модели и приведены приемы включения в модель воздействующих внешних функций. Построению математической модели жизненного цикла макрофитов экосистемы рыбоводного пруда посвящена работа [3]. Макрофиты, т.е. высшие водные растения являются излюбленным кормом белого амура. Исходя из кормовой базы рыб и учитывая круговорота вещества в

экосистеме пруда, в модель включены: *PT* – фитопланктон, *MT* – полупогруженные макрофиты, *MR* – погруженные макрофиты, *ZO* – зоопланктон, *BK* – бактерий, *BN* – бентос, *DW* и *DS* – детрит в воде и в седиментах, соответственно. Лимитирующими биогенными элементами роста и развитие фитопланктона и макрофитов в экосистеме предполагаются *PW* и *PS* – суммарный неорганический фосфор, *NW* и *NS* – суммарный неорганический азот в воде и в седиментах, соответственно.

Поскольку, как правило, в экосистемах рыбоводных прудов углерод не лимитирует продукционного процесса, но при этом является основной по весу составляющей биомассы, то, введя обозначения *CW* и *CS* – суммарный неорганический углерод в воде и в седиментах, соответственно, его потребление в модели мы учитываем косвенно.

Входными функциями модели являются температура воды $f(T)$ и интенсивность солнечной радиации на поверхности водоема $\xi(I_0)$. Включены также пять управляющие функции, характеризующие внесение искусственного корма ($\varphi^{CO}(t)$ – комбикорм, $\varphi^{CU}(t)$ – куколки тутового шелкопряда, $\varphi^{KR}(t)$ – кормовые растения) и минеральных удобрений ($\varphi^{SU}(t)$ – суперфосфат, $\varphi^{SE}(t)$ – аммиачная селитра).

Переход вещества с одного трофического уровня на другой в модели задается *s*-образными функциями вида

$$r(i, j) = \frac{\mu_{ij} \cdot i^s}{K_{ij}^s + i^s} \cdot j, \quad (1)$$

описывающая скорости потребления *i*-го субстрата *j*-ым организмом, находящимся на следующем трофическом уровне, где μ_{ij} – максимальная скорость потребления (*1/сутки*), K_{ij} – коэффициент полунасыщения (*мг/л*), *s* – параметр, задающий крутизну графика трофической функции.

Выедание, например, бентоса карпом будет задаваться функцией

$$r(BN, CR) = \frac{\mu_{BNCR} \cdot BN^s}{K_{BNCR}^s + BN^s} \cdot CR.$$

Потребление биогенных элементов - углерода, азота и фосфора, в экосистеме синхронизировано в соответствии с законами стехиометрии. Соотношение углерода, азота и фосфора в живых организмах поддерживается примерно постоянным: $CW:NW:PW = \chi^{CW}:\chi^{NW}:\chi^{PW}$, где χ^{PW} , χ^{NW} , χ^{CW} – стехиометрические коэффициенты для фосфора, азота и углерода, соответственно. Чтобы обеспечить такое соотношение CW , NW и PW в биоте, необходимо выдержать потоки потребляемых углеродо-, азото- и фосфоросодержащих веществ в таких же отношениях.

На основе приведенных соображений, потребление фосфора фитопланктоном будет определяться потоком

$$Y_{PT}^{PW} = \min \left\{ r(PW, PT), \frac{1}{\chi_{PT}^{NW}} \cdot r(NW, PT) \right\}, \quad (2)$$

где $r(i,j)$ – функция вида (1), χ_{PT}^{NW} – стехиометрический коэффициент фитопланктона при потреблении азота. Потребление азота фитопланктоном будет пропорционально $Y_{PT}^{NW} = \chi_{PT}^{NW} \cdot Y_{PT}^{PW}$, а углерода – $Y_{PT}^{CW} = \chi_{PT}^{CW} \cdot Y_{PT}^{PW}$.

В соответствии с принципом лимитирующих факторов потребление биогенных элементов фитопланктоном определяется с помощью следующей формулы:

$$\Psi_{PT}(PW, NW, CW) = Y_{PT}^{PW} + \chi_{PT}^{NW} \cdot Y_{PT}^{PW} + \chi_{PT}^{CW} \cdot Y_{PT}^{PW}$$

Потребление биогенных элементов бактериями описывается аналогично, но с другими стехиометрическими коэффициентами:

$$\Psi_{BK}(PW, NW, CW) = Y_{BK}^{PW} + \chi_{BK}^{NW} \cdot Y_{BK}^{PW} + \chi_{BK}^{CW} \cdot Y_{BK}^{PW}$$

А потребление биогенных элементов погруженными макрофитами определяется их потоками из воды и со дна. Поэтому на основе законов стехиометрии потребление фосфора вычисляется следующим образом:

где $i = PW, PS$ или NW, NS , а χ_{MR}^{NW} –

$$Y_{MR}^{PW+PS} = \min \left[r(PW, MR) + r(PS, MR), \frac{r(NW, MR) + r(NS, MR)}{\chi_{MR}^{NW}} \right]$$

стехиометрический коэффициент погруженного макрофита при потреблении азота. По этой формуле, определяя лимитирующего биогенного элемента, потребляемые потоки азота и углерода погруженными макрофитами будут заново пересчитываться согласно следующим формулам:

$$Y_{MR}^{NW+NS} = \chi_{MR}^{NW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}, \quad Y_{MR}^{CW+CS} = \chi_{MR}^{CW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}$$

$$\Psi_{MR}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) =$$

$$= Y_{MR}^{PW+PS} + \chi_{MR}^{NW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS} + \chi_{MR}^{CW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}$$

Для полупогруженных макрофитов характерно преимущественное потребление биогенов со дна,

причем, величина этого потока не столько зависит от биомассы зеленой части растений, сколько от биомассы корней, которая не входит в число переменных модели. Будем предполагать, что биомасса корней пропорциональна доступным биогенам седиментов. Тогда поток биогенов, потребляемых из седиментов, можно описать функцией $q(i)$ [$i = PS, NS$ или CS]. Потребление биогенов из воды, при помощи водных корней, начинается лишь при превышении растворенными питательными веществами определенных пороговых концентраций. Соответствующая трофическая функция $p(i, MT)$ [$i = PW, NW$ или CW]. В итоге потребление биогенных элементов полупогруженными макрофитами задается следующим образом:

$$Y_{MT}^{PW+PS} = \min \left[p(PW, MT) + q(PS), \frac{p(NW, MT) + q(NS)}{\chi_{MT}^{NW}} \right],$$

$$Y_{MT}^{NW+NS} = \chi_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS},$$

$$Y_{MT}^{CW+CS} = \chi_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS},$$

$$\Psi_{MT}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) =$$

$$Y_{MT}^{PW+PS} + \chi_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS} + \chi_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS}$$

Скорости процессов потребления и роста определяются не только количеством доступного субстрата, но и температурой и освещенностью. Предполагается, что лимитирование светом и температурой можно задать мультипликативными членами в общей функции потока вещества:

$$A_{ij} = f_j(T) \cdot \zeta_j(I_0) \cdot \psi_j(\Sigma i) \cdot (1 - \delta_j)$$

Здесь A_{ij} – течение потока вещества из i -го блока к j -ым блоком (например, из блока фитопланктона к блоку зоопланктона), $\psi_j(\Sigma i)$ – функция выедания субстрата (продуцентов, консументов или биогенов, т.е. в частности $\psi_j(\Sigma i) = r(i, j)$ или $p(i, j)$, или же $q(i)$ и т.д.), δ_j – потери j -го организма на метаболизм, $f_j(T)$, $\zeta_j(I_0)$ – функции лимитирования j -го организма температурой и светом (для продуцентов), соответственно ($0 < f_j(T)$, $\zeta_j(I_0) \leq 1$), $j = PT, MT, MR, ZO, BK, BN, TL, CR$ или BA , T – температура воды, I_0 – интенсивность солнечной радиации на поверхности пруда.

Зависимость роста организмов от температуры описывается модифицированной эмпирической функцией Лемана [4]:

$$f_j(T) = \begin{cases} \exp \left[-4,6 \cdot \left(\frac{T_{opt}^j - T}{T_{opt}^j - T_{min}^j} \right)^4 \right], & \text{если } T < T_{opt}^j \\ \exp \left[-4,6 \cdot \left(\frac{T - T_{opt}^j}{T_{max}^j - T_{opt}^j} \right)^4 \right], & \text{если } T \geq T_{opt}^j \end{cases}$$

где T_{opt}^j – оптимальная температура для развития j -

го организма, T_{min}, T_{max} – минимальная и максимальная пределы толерантности j -го организма по температуре, соответственно.

Функцию, описывающую лимитирование роста фитопланктона светом, следуя Стилу [4] зададим в виде:

$$\xi_{PT}(I_0) = \frac{I_h}{I_{opt}^{PT}} \cdot \exp\left(1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{PT}}\right),$$

где I_{opt}^{PT} – оптимальная освещенность для фитопланктона, I_h – освещенность на заданной глубине h .

Для вычисления I_h используется эмпирический закон Бэра-Ламберта об экспоненциальном затухании света с увеличением глубины: $I_h = I_0 \cdot e^{-vh}$, где I_0 – суммарная солнечная радиация на поверхности пруда. Коэффициента затухания света – v , естественно, предположить пропорциональным концентрациям взвешенных в воде веществ – фитопланктона, макрофитов и детрита:

$v = k_w + k_{pr} \cdot (PT + MR) + k_{dm} \cdot d_{dm} \cdot (DW + MT)$, где k_w – коэффициент затухания в чистой воде, k_{pr} – коэффициент затемнения фитопланктоном – PT и погруженным макрофитом – MR , k_{dm} – коэффициент затемнения детритом – DW и полупогруженным макрофитом – MT , d_{dm} – доля детрита и полупогруженного макрофита, взвешенная в воде.

Для описания лимитирования роста полупогруженных макрофитов светом используется модифицированная формула Стила. В зависимости от роста тростников она работает в двух режимах:

$$\xi_{MT}(I_0) = \begin{cases} \frac{I_h}{I_{opt}^{MT1}} \cdot e^{\left(1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{MT1}}\right)}, & \text{если } MT < MT_{cr} \\ \frac{I_0}{I_{opt}^{MT2}} \cdot e^{\left(1 - \frac{I_0}{I_{opt}^{MT2}}\right)}, & \text{если } MT \geq MT_{cr}, \end{cases}$$

где, по-прежнему, I_h – освещенность на заданной глубине h (вычисляется по формуле Бэра-Ламберта) и I_0 – суммарная солнечная радиация на поверхности водоема, а I_{opt}^{MT1} и I_{opt}^{MT2} – оптимальные освещенности для роста тростников под- и над водой ($I_{opt}^{MT1} \leq I_{opt}^{MT2}$), соответственно и MT_{cr} – критическая концентрация тростников, которая оценивается их биомассой в момент выхода стебля из воды.

Функция, описывающая лимитирование роста MR – погруженных макрофитов светом, является функцией Ди Торто [4]:

$$\xi_{MR}(I_0) = \frac{e}{vh} \left[e^{\left(-\frac{I_h}{I_{opt}^{MR}} \cdot e^{-vh}\right)} - e^{-\frac{I_h}{I_{opt}^{MR}}} \right],$$

где I_{opt}^{MR} – оптимальная освещенность для роста и развития MR , а остальные коэффициенты и параметры имеют те же смысл, что и раньше.

Процессы бактериальной деструкции аппроксимируются уравнениями химической кинетики 1-го порядка, причем предполагается, что детрит вновь распадается на азото- и фосфоросодержащие питательные вещества в соответствии с их стехиометрическим содержанием. Здесь уместны аналогии с теорией ферментативных реакций: некий «субстрат» – детрит переходит в «продукт» – биогенные вещества под действием своего рода «фермента» – бактерий. Часть продукта при этом используется бактериями для поддержания собственной жизнедеятельности.

В итоге, скорость протекания процесса бактериального разложения будет описываться формулой:

$$r(DW, BK) = \frac{\mu_{DWBK} \cdot DW^s}{K_{DWBK}^s + DW^s} \cdot BK,$$

где μ_{DWBK} – максимальная скорость разложения детрита бактериями, K_{DWBK} – соответствующая константы полунасыщения.

На скорость процессов деструкции существенно влияет температура. Поскольку бактериальные процессы ингибируются температурами практически недостижимыми в условиях естественных водоемов (+50-60°C), для описания температурной зависимости в этом случае используется формула Вант-Гоффа:

$$f_{DW}(T) = 2^{\frac{(T-T_0)}{10}},$$

отражающая факт увеличения скорости процессов в два раза при увеличении температуры на 10°C. Здесь T_0 – температура, при которой измерены остальные коэффициенты, входящие в описание процесса.

Таким образом, разложения детрита до фосфора определяется формулой:

$$A_{DWPW} = f_{DW}(T) \cdot k_{des} \cdot \frac{\chi_{BK}^{PW}}{\chi_{BK}^{PW} + \chi_{BK}^{NW} + \chi_{BK}^{CW} + k_{DWS}} \cdot r(DW, BK),$$

где k_{des} – коэффициент деструкции ($0 < k_{des} < 1$), χ_{BK}^{PW} , χ_{BK}^{NW} , χ_{BK}^{CW} – стехиометрические коэффициенты бактерий при разложении детрита для фосфора, азота и углерода, соответственно; k_{DWS} – доля детрита выходящего из круговорота и захороняемого в осадках.

Разложения детрита до азота и углерода, соответственно, будет:

$$A_{DWNW} = \chi_{BK}^{NW} \cdot A_{DWPW}, \quad A_{DWCW} = \chi_{BK}^{CW} \cdot A_{DWPW}$$

О питании рыб: Из литературных данных следует, что некоторым рыбам свойственно

элективность питания, т.е. питание с переключением. Так, например толстолобик предпочитает использовать в качестве корма фитопланктон. Но когда фитопланктона мало или не подходит видовой состав, он переходит на питание заменяющим кормом – бактериопланктоном. Если и этой пищи становится недостаточно, то он может переходить на вынужденный корм, т.е. детрит. Для описания питания с переключением мы используем практику моделирования по Кайраккумскому водохранилищу [4], и рыбоводных прудов [1], где были использованы выводы, сделанные В.С. Теном, который проанализировал опытные данные Ивлева в зависимости питания от концентрации кормовых объектов на примере питания карпа. Интерпретация опытных данных затруднена тем, что при модельном исследовании принято оперировать такими понятиями, которые позволяют усматривать сущность процесса. Выбор их в значительной мере произволен. А экспериментатор ограничен лишь эмпирически доступными величинами.

Пусть имеющиеся корма – q_i ($i=1,2,\dots$) упорядочены по предпочтению q_1, q_2, \dots , причем q_1 – концентрация излюбленного корма. Тену удалось найти зависимость вероятности потребления объекта i -го типа η_i от суммарной концентрации объектов питания

$$q = \sum_{i=1}^n q_i,$$

где q_i – концентрация i -го вида жертв. Тогда вероятность $\eta_i=1$ при любом наборе q_1, q_2, \dots, q_n , а вероятность перехода на менее предпочтительный корм η_i есть функция концентрации q_{i-1} , т.е. $\eta_i(q_{i-1})$, $i=2,3,4,\dots$. Кривые $\eta_i(q)$, $i=2,3,\dots$ имеют перевернутый s -образный вид причем $\eta_j < \eta_i$ при $j > i$ и

$$\lim_{q \rightarrow 0} \eta_i(q) = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \eta_i(q) = 0.$$

Это означает, что переходный режим не четко выражен, а охватывает полосу значений q , хотя зависимость η_i от q при больших q кажется сомнительной. Видимо, ближе к реальности зависимость $\eta_2(q_1)$, $\eta_3(q_1, q_2)$, $\eta_4(q_1, q_2, q_3)$ и т.д.

Так, например, для описания переключения толстолобика с питания бактериями в модели используется функция

$$\eta(PT) = \frac{e^{-\lambda_{PT} \cdot (PT - m_{PT})}}{1 + e^{-\lambda_{PT} \cdot (PT - m_{PT})}},$$

где λ_{PT} – параметр характеризующая крутизну кривой, m_{PT} – коэффициент полуобеспеченности фитопланктоном, т.е. значение PT , при котором $\eta(PT)=1/2$.

Тогда потребление бактерий толстолобиком в случае недостатка фитопланктона запишется в виде

$$A_{BKTL} = f_{TL}(T) \cdot \min \left\{ \frac{[r(PT_{cr}, TL) - r(PT, TL)]}{r(BK, TL) \cdot \eta(PT)} \right\} \cdot (1 - \delta_{TL}),$$

где PT_{cr} – критическое значение фитопланктона, при котором толстолобик переходит на питание бактериями. Разность двух трофических функций под знаком минимума обеспечивает ограничение скорости роста рыб так, чтобы она была не выше той, которая достигнута на излюбленном корме (при $PT=PT_{cr}$). При нехватке бактерий толстолобик переходит на питание детритом и т.д. В этом случае переключение – двухступенчатое, трехступенчатое и т.д.

Потребление толстолобиком фитопланктона представляется в виде

$$A_{PTTL} = f_{TL}(T) \cdot r(PT, TL) \cdot (1 - \delta_{TL}).$$

Остались неописанными еще два процесса: метаболизм и смертность живых организмов экосистемы. Выделение живыми объектами водоема продуктов метаболизма в первом приближении считать пропорциональным суммарному потреблению кормовых объектов. Выделение продуктов метаболизма и переход их в детрит в модели представлен следующим образом (на примере толстолобика):

$$C_{TLDS}^1 = (A_{PTTL} + A_{BKTL} + A_{DSTL}) \frac{\delta_{TL}}{(1 - \delta_{TL})},$$

где δ_{TL} – коэффициент метаболизма толстолобика, A_{PTTL} , A_{BKTL} , A_{DSTL} – потоки, описывающие потребление фитопланктона, бактерий и детрита толстолобиком, соответственно.

Кроме того, для рыб учитывается зависимость усвоения пищи от величины рациона. Так, например, при обильном питании толстолобика пища заглатывается непрерывно и проходит через кишечник с такой быстротой, что лишь 30-40% ее усваивается, тогда, как при умеренном питании усваивается в 2 раза больше [1, 4].

Таким образом:

$$C_{TLDW}^2 = R_{TL}^2 \frac{\delta_{TL}^S}{R_{TL}^{max}},$$

где $R_{TL} = A_{PTTL} + A_{BKTL} + A_{DSTL}$, R_{TL}^{max} – максимальный рацион для толстолобика, δ_{TL}^S – суммарный метаболический параметр для толстолобика.

Смертность живых организмов, как известно из многих литературных источников, зависит от наличия растворенного кислорода в воде. В нашей модели предполагается, что наличие кислорода в воде не лимитирует процессов жизнедеятельности организмов и находится на уровне насыщенности.

Поэтому, смертность организмов и их переход в детрит задается линейной функцией биомассы или концентрации живых объектов. Естественная смертность рыб в условиях оптимального режима в нагульном пруду должна отсутствовать. Но, учитывая вероятности паразитических и прочих инфекционных заболеваний рыбных популяций пруда, в модели учтена смертность рыб

$$C_{iDW}^3 = k_i^{cm} \cdot i,$$

где k_i^{cm} – коэффициент смертности i -го организма, $i=PT, ZO, BK, BN, TL, CR$ или BA .

Образующийся при этом детрит состоит из углерода, азота и фосфора, причем лишь азот и фосфор детрита включены в число переменных модели. Таким образом, например, поток A_{TLDW} характеризуется так:

$$A_{TLDW} = (\delta_{TL} + \delta_{TL}^S \cdot R_{TL} / R_{TL}^{max}) \cdot R_{TL} / (1 - \delta_{TL}) + k_{TL}^{cm} \cdot TL$$

Итак, нами представлены основные потоки вещества, необходимые для описания экосистемы рыбоводного пруда. На основе диаграммы потоков веществ [2] и с учетом вышеуказанных соображений теперь можно написать уравнения модели. Математическая модель представляет собой не-

линейную систему 15 обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику развития исследуемых переменных экосистемы рыбоводного пруда:

$$\frac{dj}{dt} = \sum f_j(T) \cdot \xi_j(I_0) \cdot r(i, j) \cdot (1 - \delta_j),$$

где $j = TL, CR, BA, PT, MT, MR, ZO, BK, BN, PW, PS, NW, NS, DW, DS$.

Литература:

1. Комилов Ф. С., Мирзоев С.Х., Акобиров Ф., Эргашбоев И. Микробиологические основы компьютерного моделирования экосистемы рыбоводного пруда // Известия АН РТ, отд.биол. и мед.наук, № 2 (190). – 2015, С. 54-62.
2. Комилов Ф.С., Косимов И.Л. Концептуальное моделирование экосистемы макрофитно-рыбоводного пруда // Вестник Таджикского национального университета, №3(85). – Душанбе, 2012. – С. 39-48.
3. Комилов Ф.С., Косимов И.Л. Жизненный цикл макрофитов: описание протекающих процессов, математическое моделирование // Вестник Таджикского национального университета, №3(85). – Душанбе, 2012. – С. 22-28.
4. Комилов Ф.С., Пархоменко В.П. Математическое моделирование экосистем водохранилищ. – М.: ВЦ РАН, «Сообщение по прикладной математике», 2003. – 51с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Нурув И.Д.