

ТЕХНИКА ИЛИМДЕРИ ЖАНА АРХИТЕКТУРА
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ И АРХИТЕКТУРА
TECHNICAL SCIENCES AND ARCHITECTURE

Исаев А.Д.

ЗАДАЧА О ПОПЕРЕЧНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ИЗГИБЕ

Исаев А.Д.

ТУУРАСЫНАН ТҮЗ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИЙИЛҮҮ МАСЕЛЕСИ

A.D. Isaev

PROBLEM OF TRANSVERSE NONLINEAR BENDING

УДК: 539.3(575.2)(04)

В статье рассматривается задача об определении упругой линии, приводящее к табличному эллиптическому интегралу сравниваемому с предлагаемым аналитическим решением задачи.

Ключевые слова: упругая линия, шарнирная опора, жёсткое защемление, жёсткость, изгиб.

Макалада таблицалык эллиптикалык интегралга алып келүүчү серпилгичтүү сызыкты аныктоо маселеси жана аны салыштыруу аркылуу сунушталуучу аналитикалык туюнтмасы каралат.

Негизги сөздөр: серпилгичтүү сызык, шарнирдик тирек, кысуу.

The article deals with the problem of determining the elastic line, resulting in tabular elliptic integral compare with the proposed analytical solution of the problem.

Key words: the elastic line hinged support, rigid pinching, bending stiffness.

Введение.

1. Постановка задачи: Дана балка (в дальнейшем упругая линия), левый конец которой жёстко защемлён, на расстоянии $\eta_1 L$ действует поперечная сила P , на расстоянии L действует сила реакции R_{Cy} от подвижной шарнирной опоры. Длина балки $L + \eta_2 L$, линейная плотность пренебрежимо мала. Требуется найти зависимость смещений $\Delta_1(P)$, $\Delta_2(P)$ от первоначальных позиций на рис 1, а также зависимость смещения $\Delta_2(P)$ от $\Delta_1(P) \Rightarrow \Delta_2(P) = G(\Delta_1(P))$.

Исследование многих задач на нелинейный изгиб приводит к эллиптическому интегралу, решение которых имеет громоздкий табличный вид. В этой работе, методом анализа и сравнения предлагается аналитическое решение задачи. Анализ сходимости выведенных функций производится на графиках построенных с помощью Mathcad 11. Экспериментальные данные требующие уточнения, полезны для сравнения величин и форм изгиба упругой линии. Изменения углов происходит в пределе: $-90^0 \leq \theta(z) \leq 90^0$ т.е. положительное направление-поворот против часовой стрелки. Величины являющиеся функциями от «z» в уравнениях иногда опускаются не изменяя сути решения задачи.

Актуальность. Многие явления встречающиеся в природе описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, решение которых приводит к табличному эллиптическому интегралу [4]. В технике встречаются такие конструкции, в которых стержень или тонкая полоска сильно изгибаются в пределах упругости. В связи с этим актуальной является задача определения больших перемещений при изгибе, когда в процессе изгиба тонкой детали сильно изменяется её первоначальная конфигурация. Подробное описание, расчёты и методики даются в книге Е.П. Попова [5].

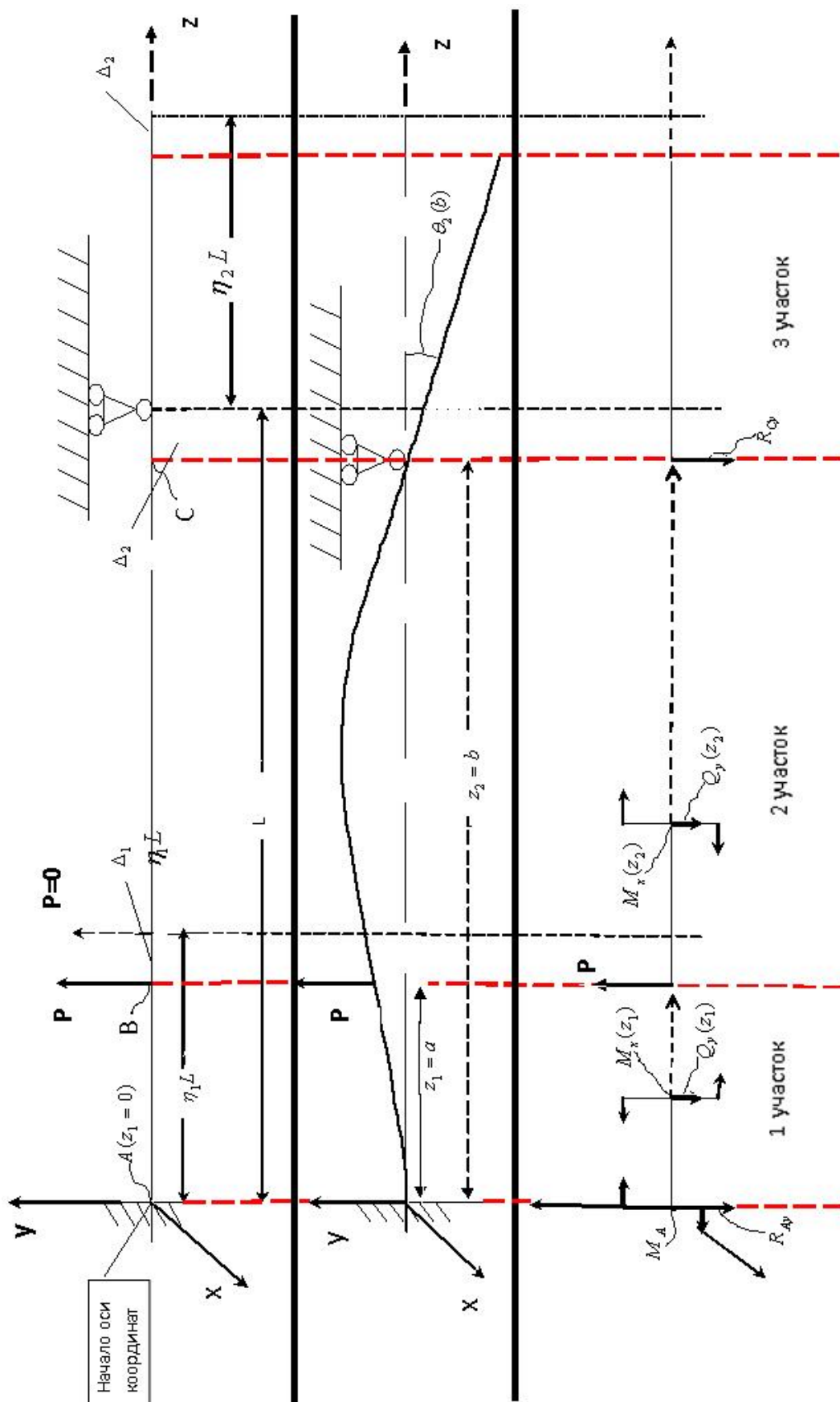


Рис. 1. Нагружение силой P . (вид сверху).
 $0 \leq \eta_1 \leq 1$; $0 \leq \eta_2 \leq 1$; $\eta_1 L - \Delta_1 = a(P)$; $L - \Delta_2 = b(P)$.

II. Теоретическая часть. Уравнение упругой линии.

Из курса математического анализа известно [1]:

$$\frac{1}{\rho(z)} - \frac{1}{\rho_0(z)} = \frac{M_x(z)}{EI_x} - \frac{M_{x0}(z)}{EI_x} ; \quad \frac{1}{\rho(z)} = k(z) \rightarrow \text{кривизна}, \quad \rho(z) \rightarrow \text{радиус кривизны}$$

$EI_x = \text{const}$ по всей длине балки, называется жёсткостью на изгиб.

$$k(z) - k_0(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} - \frac{M_{x0}(z)}{EI_x} \quad k_0(z) - \text{первоначальная кривизна, в случае прямой} \quad (1)$$

линии $k_0(z) = 0$ тогда $\frac{1}{\rho(z)} = k(z) = \frac{y''(z)}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} \rightarrow \frac{y''(z)}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} = \frac{M_x(z)}{EI_x}$

является нелинейным дифференциальным уравнением

заметим, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{dy}{dz} = \text{tg}(\theta) \text{ в частом случае, когда } \theta(z) \ll 1 ,$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \rightarrow \cos(\theta) \approx 1, \sin(\theta) \approx \theta \quad \text{tg}(\theta) \approx \theta, \quad \text{tg}^2(\theta) \approx 0 - \text{можно пренебречь.}$$

Основное уравнение (1) принимает вид

$$y''(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (2)$$

Принцип суперпозиции решений, т.е. принцип простого сложения результатов действия различных сил в отличие от обычной линейной теории изгиба стержней несправедлив.

Для удобства использования уравнения (1) преобразовывается [5]

$$\frac{\frac{d \text{tg}(\theta)}{dz}}{\sqrt{(1+\text{tg}^2(\theta))^3}} = \cos(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{dS} \Rightarrow k(z) - k_0(z) = \frac{d\theta}{dS} - \frac{d\theta_0}{dS} \quad \text{где } \theta \text{ и } \theta_0 \text{ углы наклона в}$$

текущей точке соответственно упругой линии и начальной кривой. Так как начальная кривая является прямой

то, $\frac{d\theta}{dS} = \frac{M_x(z)}{EI_x}$

Граничные условия для нелинейного уравнения:

$$y_{z_1=0} = 0; \quad y_{z_2=b} = 0$$

$$\sin(\theta_1)_{z_1=0} = 0; \quad \sin(\theta_2)_{z_2=b} = C_2$$

$$y_{z_1=a} = y_{z_2=a}$$

$$\sin(\theta_1)_{z_1=a} = \sin(\theta_2)_{z_2=a} ; \quad \left(\frac{d\theta_1}{dS_1} \right)_{z_1=a} = \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)_{z_2=a} \quad (3)$$

$$0 \leq z_1 \leq a; \quad a \leq z_2 \leq b$$

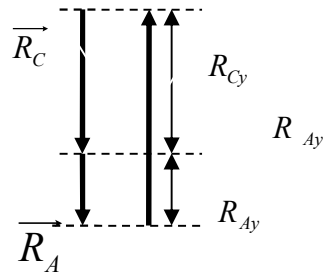
Составим уравнение сил и моментов сил в точках относительно назначенной системы координат.

$$\text{В точке «А» } \sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iz} = R_{Az} - R_{Cz} = 0 \Rightarrow R_{Az} = R_{Cz}$$

$$\begin{aligned} \sum P_{iy} &= -R_{Ay} + P - R_{Cy} = 0 \\ \sum m_A &= M_A + a \cdot P - b \cdot R_{Cy} = 0; \quad M_A = b \cdot R_{Cy} - a \cdot P \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_{Cy} &= P - R_{Ay}; \quad R_{Cz} = R_{Cy} \cdot \operatorname{tg}(\theta_C); \\ R_{Az} &= R_{Ay} \cdot \operatorname{tg}(\theta_A); \quad \theta_A = \theta_{\tilde{N}} = 0 \quad \text{òí} \quad R_{Az} = R_{Cz} = 0 \end{aligned}$$

Предполагается, что



(5)

$$\overline{P} = \overline{R_{Ay}} + \overline{R_{Cy}}$$

Разобьём на участки 1, 2, 3

1.1 Участок $0 \leq z_1 \leq a$ (Метод согласующийся с методом эллиптических параметров [5])

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dS_1} &= - \left(\underbrace{\frac{(b \cdot R_{Cy} - a \cdot P)}{EI_x}}_A + z_1 \cdot \underbrace{\frac{(P - R_{Cy})}{EI_x}}_{A_1} \right); \quad \frac{d\theta_1}{dS_1} \cdot dz_1 = - \underbrace{(A + A_1 \cdot z_1)}_{t_1} \cdot dz_1 \\ \int \cos(\theta_1) d\theta_1 &= \int - (A + A_1 \cdot z_1) dz_1 \Rightarrow \sin(\theta_1) = \frac{-1}{2 \cdot A_1} \cdot [- (A + A_1 \cdot z_1)]^2 + C_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sin(\theta_1)^* = -A \cdot z_1 - \frac{A_1}{2} \cdot z_1^2 + C_1^*$$

$$\theta_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{A^2}{2 \cdot A_1}; \quad \sin(\theta_1) = \frac{-1}{2 \cdot A_1} \cdot \left[\underbrace{-(A + A_1 \cdot z_1)}_{\frac{d\theta_1}{dS_1}} \right]^2 + \frac{A^2}{2 \cdot A_1}$$

$$C_1^* = 0; \quad \sin(\theta_1)^* = -A \cdot z_1 - \frac{A_1}{2} \cdot z_1^2; \quad \sin(\theta_1)^* = -A \cdot z_1 - \frac{A_1}{2} \cdot z_1^2 + C_1^* \text{ используется не будет.}$$

$$\frac{y''(z_1)}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}} = \frac{M_x(z_1)}{EI_x}$$

$$y''(z_1) = 0 \quad \text{наличие перегиба на этом участке определяется} \quad - (A + A_1 \cdot z_1^*) = 0 \rightarrow z_1^* = \frac{-A}{A_1} \quad \text{при}$$

больших нагрузках точка перегиба проявляется отчётливо и совпадает с экспериментальной точкой

$$\text{перегиба.} \quad \sin(\theta(z_1^*)) = C_1 = \frac{A^2}{2 \cdot A_1}$$

$$dy_1 = \frac{-1}{2 \cdot A_1} \cdot 2 \cdot \sqrt{A_1} \cdot \sqrt{\left[\sin\left(\frac{\theta(z_1^*)}{2} + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 \right]} \cdot d\theta_1 + \sin(\theta(z_1^*)) \cdot dS_1$$

с учётом для форм с перегибом $\sin\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = k_1 \sin(\phi_1) \Rightarrow \frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4} = \arcsin(k_1 \sin(\phi_1))$

$$d\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = d[\arcsin(k_1 \sin(\phi_1))] \quad d\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{k_1 \cdot \cos(\phi_1) d\phi_1}{\sqrt{1 - (k_1 \cdot \sin(\phi_1))^2}}$$

$$dy_1 = \frac{-2}{\sqrt{A_1}} \cdot \frac{k_1^2 \cdot \cos^2(\phi_1) \cdot d\phi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cdot \sin^2(\phi_1)}} + \sin(\theta(z_1^*)) \cdot dS_1$$

используя табличный интеграл Лежандра

$$\int_{\phi_1(0)}^{\phi_1(a)} \frac{\cos^2(\phi_1) \cdot d\phi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cdot \sin^2(\phi_1)}} = \frac{[E(\phi_1(a), k_1) - E(\phi_1(0), k_1)]}{k_1^2} - \frac{1 - k_1^2}{k_1^2} \cdot [F(\phi_1(a), k_1) - F(\phi_1(0), k_1)] \quad (\text{Приложение 1})$$

$$y_1(a) - \underbrace{y_1(0)}_0 = \frac{-2}{\sqrt{A_1}} \cdot k_1^2 \cdot \left[\frac{E(\phi_1(a), k_1) - E(\phi_1(0), k_1)}{k_1^2} - \frac{(1 - k_1^2)}{k_1^2} \cdot (F(\phi_1(a), k_1) - F(\phi_1(0), k_1)) \right] + \frac{\sin(\theta(z_1^*))}{\sqrt{A_1}} \cdot [F(\phi_1(a), k_1) - F(\phi_1(0), k_1)]$$

$$y_1(a) = \frac{-2}{\sqrt{A_1}} \cdot [E(\phi_1(a), k_1) - E(\phi_1(0), k_1)] + [F(\phi_1(a), k_1) - F(\phi_1(0), k_1)] \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - k_1^2)}{\sqrt{A_1}} + \frac{\sin(\theta(z_1^*))}{\sqrt{A_1}} \right] \quad (7)$$

1.2 Участок $0 \leq z_1 \leq a$ (Аналитический метод и Mathcad 11)

Известно, что для решений эллиптических интегралов применяется равенство среднегеометрического среднеарифметическому сравниваемых величин при условии, если сами величины приблизительно равны.

$$\frac{dS_1}{dz_1} - \frac{dy_1}{dz_1} = \frac{1}{\cos(\theta_1)} - \operatorname{tg}(\theta_1) = \sqrt{\frac{1 - \sin(\theta_1)}{1 + \sin(\theta_1)}}$$

$$\frac{\overbrace{\sqrt{\frac{f(z_1)}{1 - \sin(\theta_1)}}}^{ff(z_1)}}{\sqrt{1 + \sin(\theta_1)}} = \frac{\overbrace{1 - \sin(\theta_1) + \frac{1}{1 + \sin(\theta_1)}}^{ff(z_1)}}{\underbrace{2}_{M(\theta_1)}} \quad (8)$$

переобозначение $M(\theta_1)$ -коэффициента имеет смысл для сходимости функций.

$$\cos(\theta_1) = \frac{1 + \cos^2(\theta_1)}{2} \Rightarrow M(\theta_1) = \frac{1}{\cos(\theta_1)} + \cos(\theta_1) \text{ при малых значениях углов текущих}$$

точек $M(\theta_1) = 2 \Rightarrow \cos^2(\theta_1) + 2 \cdot \cos(\theta_1) + 1 = 0$, если представить

$$M(\theta_1) = m_{11} + m_{12}, \quad m_{11} \cdot m_{12} = 1 \rightarrow m_{11} = \frac{1}{m_{12}} \text{ ясно, что если } m_{11} = \cos(\theta_1) \text{ то, } m_{12} = \frac{1}{\cos(\theta_1)} \text{ По}$$

при больших углах равенство теряет смысл.

дбирая $M(\theta_1)$ при малых нагрузениях, можно добиться относительно хорошей сходимости функций на графиках Mathcad 11.

Поведение функций на графике Mathcad 11 с учётом изменения нагрузки.

$$f(z_1) = \sqrt{\frac{1 - \sin(\theta_1)}{1 + \sin(\theta_1)}}, \quad ff(z_1) = \frac{1 - \sin(\theta_1) + \frac{1}{1 + \sin(\theta_1)}}{2} \text{ для участка } 0 \leq z_1 \leq a$$

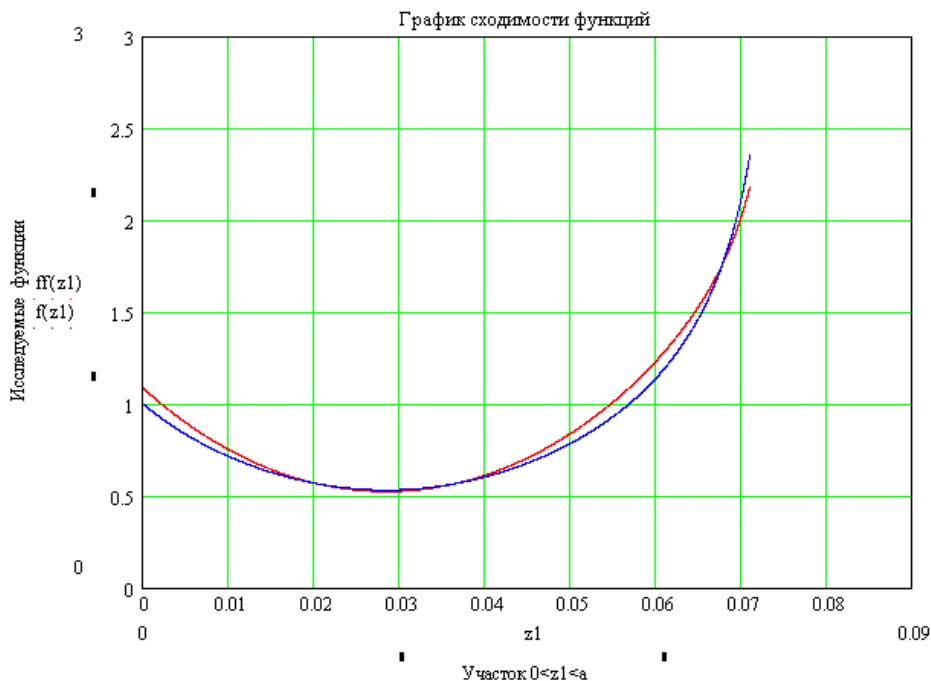


Рис. 2. Сходимость функций $f(z_1)$ и $ff(z_1)$ на участке $0 \leq z_1 \leq a$

$$\frac{1}{\cos(\theta_1)} - \frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} = \sqrt{\frac{1 - \sin(\theta_1)}{1 + \sin(\theta_1)}} = \frac{1 - \sin(\theta_1) + \frac{1}{1 + \sin(\theta_1)}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta_1)} = \frac{2 - \sin^2(\theta_1)}{2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot (1 - \sin^2(\theta_1))}$$

$$\int dS_1 = \int \frac{2 - \sin^2(\theta_1)}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_1))} dz_1 = \int \frac{-1}{A_1} \left(\frac{2 - \sin^2(\theta_1)}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_1))} \right) dt_1$$

$$S(z_1) = \frac{- \left[\frac{1}{2} \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{t_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{t_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right]}{A_1} + C_{S_1}$$

$$C_{S_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{A}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{A}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right]}{-A_1}$$

$$\int dy_1 = \int \sin(\theta_1) \cdot dS_1 = \int \frac{\sin(\theta_1) \cdot (2 - \sin^2(\theta_1))}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_1))} dz_1 = \int \frac{-1 \cdot \sin(\theta_1) \left(\frac{2 - \sin^2(\theta_1)}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_1))} \right) dt_1}{A_1}$$

$$y(z_1) = \frac{- \left[\frac{1}{4 \cdot A_1} \cdot \left(\frac{-1}{3} \cdot t_1^3 + A^2 \cdot t_1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{t_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{t_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right]}{A_1} + C_{y_1}$$

$$C_{y_1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-A^3 \cdot (2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot A_1^2 \cdot \text{Arth} \left[\frac{A}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot (-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot A_1^2 \cdot \text{Arth} \left[\frac{A}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot (2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A_1^2 \cdot (2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ещё один вывод связанный со вторым замечательным пределом:

$$\lim_{\sin(\theta_1) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 - \sin(\theta_1)}{1 + \sin(\theta_1)}} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_1)}}{e^{\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_1)}} = e^{-\sin(\theta_1)} \quad \lim_{\sin(\theta_1) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \sin(\theta_1)}{1 - \sin(\theta_1)}} = \frac{e^{\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_1)}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_1)}} = e^{\sin(\theta_1)} \quad (9)$$

несмотря, что $-1 \leq \sin(\theta) \leq +1$ имеет место деление, далее

$$\frac{dS_1}{dz_1} - \frac{dy_1}{dz_1} = \frac{1}{\cos(\theta_1)} - \text{tg}(\theta_1) = \sqrt{\frac{1 - \sin(\theta_1)}{1 + \sin(\theta_1)}} \quad ; \quad \frac{dS_1}{dz_1} + \frac{dy_1}{dz_1} = \frac{1}{\cos(\theta_1)} + \text{tg}(\theta_1) = \sqrt{\frac{1 + \sin(\theta_1)}{1 - \sin(\theta_1)}}$$

$$\frac{d\theta_1}{dS_1} \cdot dz_1 = \overbrace{- (A + A_1 \cdot z_1)}^{t_1} \cdot dz_1 \Rightarrow \frac{d\theta_1}{dS_1} = t_1 \Rightarrow t_1 \cdot dS_1 = d\theta_1 \text{ умножив обе части}$$

$$\text{на } \sin(\theta_1) \Rightarrow t_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot dS_1 = \sin(\theta_1) \cdot d\theta_1 \Rightarrow t_1 \cdot dy_1 = -d \cos(\theta_1)$$

$$dS_1 - dy_1 = e^{-\sin(\theta_1)} \cdot dz_1 = \frac{e^{-\sin(\theta_1)} \cdot \cos(\theta_1)}{t_1} d\theta_1 \quad ; \quad \theta(z_1) + \cos(\theta_1) = -e^{-\sin(\theta_1)} + C_{11}$$

с учётом граничных условий $\theta(z_1) + \cos(\theta_1) = -e^{-\sin(\theta_1)} + 2$ имеет точную сходимость $0^\circ \leq \theta_1 \leq +90^\circ$

$$dS_1 + dy_1 = e^{\sin(\theta_1)} \cdot dz_1 \Rightarrow \theta(z_1) - \cos(\theta_1) = e^{\sin(\theta_1)} - 2 \quad -90^\circ \leq \theta_1 \leq 0^\circ \quad (10)*$$

Прибавляя и вычитая полученные равенства имеем :

$$\theta(z_1) = \frac{e^{\sin(\theta_1)} - e^{-\sin(\theta_1)}}{2} = \text{sh}[\sin(\theta_1)] \text{ гиперболический синус}$$

$$\cos(\theta_1) = 2 - \underbrace{\frac{(e^{-\sin(\theta_1)} + e^{\sin(\theta_1)})}{2}}_{\text{гиперболический косинус}} = 2 - \text{ch}[\sin(\theta_1)] \text{ имеет хорошую сходимость } -55^\circ \leq \theta_1 \leq +55^\circ$$

2.1 Участок $a \leq z_2 \leq b$ (Метод согласующийся с методом эллиптических параметров. [5])

$$\begin{aligned} \sum R_y &= -R_{Ay} \cdot \cos(\theta_2) + P \cdot \cos(\theta_2) + Q_y(z_2) = 0 \Rightarrow Q_y(z_2) = (R_{Ay} - P) \cdot \cos(\theta_2) \\ \sum m_x(z_2) &= z_2 R_{Ay} + M_A - (z_2 - a)P + M_x(z_2) = 0 \\ M_x(z_2) &= -(M_A + z_2 R_{Ay} - (z_2 - a) \cdot P) \\ M_x(z_2) &= -[M_A + z_2 \cdot (P - R_{Cy}) - (z_2 - a) \cdot P] \\ M_x(z_2) &= -(b \cdot R_{Cy} - a \cdot P + a \cdot P - z_2 \cdot R_{Cy}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d\theta_2}{dS_2} = - \left(\frac{R_{Cy}}{EI_x} \cdot (b - z_2) \right) \Rightarrow \frac{d\theta_2}{dS_2} \cdot dz_2 = - \left(\frac{R_{Cy}}{EI_x} \cdot (b - z_2) \right) \cdot dz_2 ;$$

$$\int \cos(\theta_2) d\theta_2 = \int - (A_2 \cdot (b - z_2)) \cdot dz_2 ; \quad \sin(\theta_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \left[\underbrace{-A_2 \cdot (b - z_2)}_{\frac{d\theta_2}{dS_2}} \right]^2 + C_2$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)_{z_2=b} = 0 \Rightarrow C_2 = \sin \theta_2(b)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)^2 + \sin \theta_2(b) ; \quad \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (-A_2)} \cdot \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)} = \sqrt{\sin \theta_2(b) - \sin(\theta_2)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2 \cdot (-A_2)} \cdot \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)} = \sqrt{1 + \sin \theta_2(b) - 1 - \sin(\theta_2)} ;$$

$$\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_2(b)}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_2(b)}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta_2(b)}{2}\right) - \left[\sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right]}$$

$$\sqrt{\left(\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_2(b)}{2}\right) \right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2 \cdot (-A_2)} \cdot \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{(-A_2)} \cdot \left(\frac{d\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{dS_2} \right)} = \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2}$$

тоже приводит к эллиптическому интегралу.

$$\sqrt{\frac{1}{(-A_2)} \cdot \left(\frac{d\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{dS_2} \right)} = \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2}$$

$$\beta_2 = \sqrt{-A_2} ; \quad \zeta_2 = \frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4} ; \quad k_2 = \sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) ; \quad \sin(\zeta_2) = k_2 \sin(\phi_2) \quad (\text{но не } k_2 = \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)})$$

$$d\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = d \arcsin(k_2 \cdot \sin(\phi_2)), \quad d\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{k_2 \cdot \cos(\phi_2) \cdot d\phi_2}{\sqrt{1 - (k_2 \cdot \sin(\phi_2))^2}}$$

$$\beta_2 \int_{\eta_1 \cdot L}^L dS_2 = \int_{\phi_2(a)}^{\phi_2(b)} \frac{d\phi_2}{\sqrt{1 - (k_2 \sin(\phi_2))^2}} = [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)] \quad (\text{Приложение 1}) \quad (14)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \left[\underbrace{-A_2 \cdot (b - z_2)}_{\frac{d\theta_2}{dS_2}} \right]^2 + C_2 \Rightarrow \frac{dy_2}{dS_2} = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2^2 + \sin(\theta_2(b))$$

$$dy_2 = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2^2 \cdot dS_2 + \sin(\theta_2(b)) \cdot dS_2 \rightarrow dy_2 = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2 \cdot d\theta_2 + \sin(\theta_2(b)) \cdot dS_2$$

$$dy_2 - \sin(\theta_2(b)) \cdot dS_2 = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot \sqrt{2A_2 \cdot (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_2 b))} \cdot d\theta_2$$

$$dy_2 - \sin(\theta_2(b)) \cdot dS_2 = \frac{2}{\sqrt{-A_2}} \cdot \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\theta_2(b)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2} \cdot d\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_{y_2(a)}^{y_2(b)} dy_2 - \sin(\theta_2(b)) \cdot \int_{\eta_1 \cdot L}^L dS_2 = \frac{2}{\sqrt{-A_2}} \int_{\phi_2(a)}^{\phi_2(b)} \frac{k_2^2 \cdot \cos^2(\phi_2) d\phi_2}{\sqrt{1 - (k_2 \sin(\phi_2))^2}}$$

используя табличный интеграл Лежандра

$$\int_{\phi_2(a)}^{\phi_2(b)} \frac{\cos^2(\phi_2) \cdot d\phi_2}{\sqrt{1 - k_2^2 \cdot \sin^2(\phi_2)}} = \frac{[E(\phi_2(b), k_2) - E(\phi_2(a), k_2)]}{k_2^2} - \frac{1 - k_2^2}{k_2^2} \cdot [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)] \quad (\text{Приложение 1})$$

$$\underbrace{y_2(b) - y_2(a)}_0 = \frac{2 \cdot k_2^2}{\sqrt{-A_2}} \cdot \left[\frac{[E(\phi_2(b), k_2) - E(\phi_2(a), k_2)]}{k_2^2} - \frac{1 - k_2^2}{k_2^2} \cdot [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)] \right] + \underbrace{\frac{\sin(\theta_2(b))}{\sqrt{-A_2}} \cdot [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)]}_{\sin(\theta_2(b))(L - \eta_1 L)}$$

$$-y_2(a) = \frac{2}{\sqrt{-A_2}} \cdot [E(\phi_2(b), k_2) - E(\phi_2(a), k_2)] + [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)] \cdot \left[\frac{\sin(\theta_2(b))}{\sqrt{-A_2}} - \frac{2 \cdot (1 - k_2^2)}{\sqrt{-A_2}} \right] \quad (15)$$

$$L - \eta_1 \cdot L = \frac{1}{\sqrt{-A_2}} \cdot [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)]$$

2.2 Участок $a \leq z_2 \leq b$ (Аналитический метод и Mathcad 11)

С аналогичными рассуждениями и на этом участке имеем :

$$\sqrt{\frac{1+\sin(\theta_2)}{1-\sin(\theta_2)}} = \frac{\overbrace{1+\sin(\theta_2) + \frac{1}{1-\sin(\theta_2)}}^{ff(z_2)}}{\underbrace{2}_{M(\theta_2)}} \quad \text{и} \quad \lim_{\sin(\theta_2) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+\sin(\theta_2)}{1-\sin(\theta_2)}} = \frac{e^{\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_2)}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_2)}} = e^{\sin(\theta_2)} \quad (16)$$

$$\lim_{\sin(\theta_2) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1-\sin(\theta_2)}{1+\sin(\theta_2)}} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_2)}}{e^{\frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_2)}} = e^{-\sin(\theta_2)}$$

заметим, что равенство среднегеометрического

и среднеарифметического значений на двух участках различны.

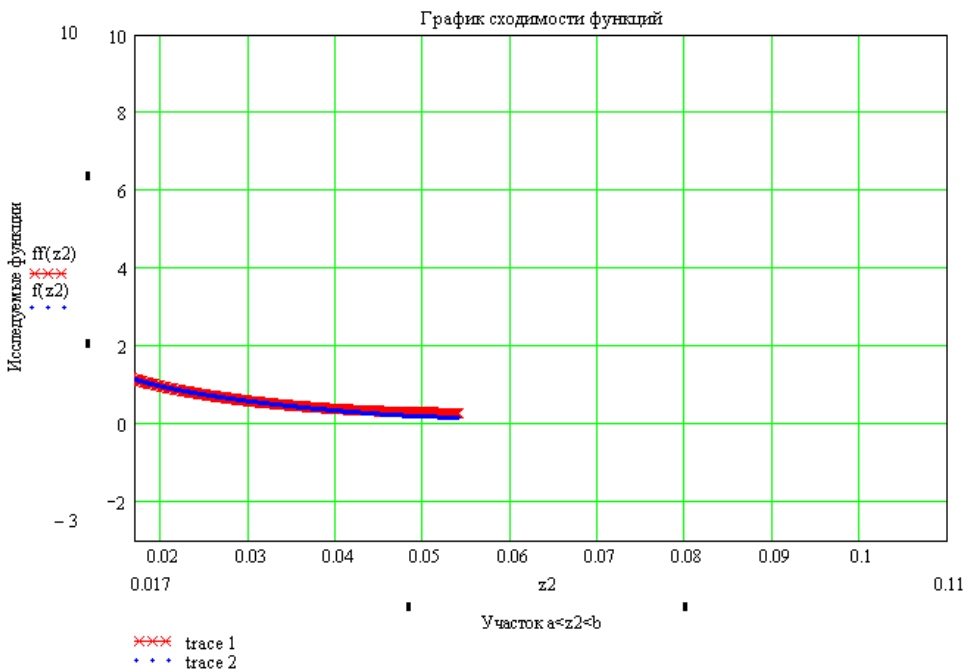


Рис. 3. $f(z_2)$ и $ff(z_2)$ на участке $a \leq z_2 \leq b$

$$\int dS_2 = \int \frac{2 - \sin^2(\theta_2)}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_2))} dz_2 = \int \frac{1}{A_2} \left(\frac{2 - \sin^2(\theta_2)}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_2))} \right) dt_2$$

$$S(z_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2 + \frac{1}{4 \cdot (\sin(\theta_b) \cdot A_2 + A_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{t_2}{(\sin(\theta_b) \cdot A_2 + A_2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{4 \cdot (\sin(\theta_b) \cdot A_2 - A_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{t_2}{(\sin(\theta_b) \cdot A_2 - A_2)^{\frac{1}{2}}} \right] + C_{S_2}$$

$$C_{S_2} = L$$

$$\int dy_2 = \int \frac{\sin(\theta_2) \cdot (2 - \sin^2(\theta_2))}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_2))} dz_2 = \int \frac{\sin(\theta_2)}{A_2} \left(\frac{2 - \sin^2(\theta_2)}{2 \cdot (1 - \sin^2(\theta_2))} \right) dt_2 \quad (17)$$

$$y(z_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot \sin(\theta_b) \cdot t_2 + \frac{1}{6 \cdot A_2^2} \cdot t_2^3 + \frac{1}{4 \cdot (\sin(\theta_b) \cdot A_2 + A_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{t_2}{(\sin(\theta_b) \cdot A_2 + A_2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{4 \cdot (\sin(\theta_b) \cdot A_2 - A_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{t_2}{(\sin(\theta_b) \cdot A_2 - A_2)^{\frac{1}{2}}} \right] + C_{y_2}$$

$$C_{y_2} = 0$$

Далее для второго участка $\theta_2 = \sin(\theta_2) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2) + \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2(b))$

удовлетворяет при простой подстановке углов $-75^\circ \leq \theta_2 \leq +75^\circ$

$$\theta_2 = \sin(\theta_2) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2) + \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2(b)) - \text{подставив } dS_2 = \frac{1}{t_2} \cdot d\theta_2 \Rightarrow$$

$$dS_2 = \frac{1}{t_2} \cdot d\left(\sin(\theta_2) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2) + \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2(b)) \right) ;$$

$$dy_2 = \frac{\sin(\theta_2)}{t_2} \cdot d\left(\sin(\theta_2) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2) + \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2(b)) \right)$$

$$dS_2 = \frac{1}{t_2} \cdot \frac{d\left[\sin(\theta_2) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2) + \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2(b)) \right]}{dz_2} \cdot dz_2 \Rightarrow$$

$$dS_2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2^2 + \sin(\theta_2(b)) \right)^2 \right]}{A_2} \cdot dt_2$$

$$S(z_2) = \frac{1}{A_2} \cdot \left(t_2 + \frac{1}{20 \cdot A_2^2} \cdot t_2^5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2} \cdot t_2^3 + \sin^2(\theta_2(b)) \cdot t_2 \right) + L$$

$$dy_2 = \frac{\sin(\theta_2)}{t_2} \cdot d\left(\sin(\theta_2) + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2) + \theta_2(b) - \sin(\theta_2(b)) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\theta_2(b)) \right) \Rightarrow$$

$$dy_2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2^2 + \sin(\theta_2(b)) \right)^2 \right]}{A_2} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot t_2^2 + \sin(\theta_2(b)) \right] dt_2 \Rightarrow \quad (18)$$

$$y(z_2) = \frac{1}{A_2} \cdot \left[\frac{1}{56 \cdot A_2^2} \cdot t_2^7 + \frac{3}{20} \cdot \frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2^2} \cdot t_2^5 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sin^2(\theta_2(b))}{A_2} + \frac{\sin^2(\theta_2(b))}{A_2} \right) \cdot t_2^3 + (1 + \sin^2(\theta_2(b))) \cdot \sin(\theta_2(b)) \cdot t_2 \right] + \frac{C_{y_2}}{0}$$

3. Участок $b \leq z_3 \leq b + \eta_2 L$ (Не рассчитывается)

$$\sum R_Y = -R_{Ay} \cdot \cos(\theta_3) - R_{Cy} \cdot \cos(\theta_3) + P \cdot \cos(\theta_3) + Q_y = 0 \Rightarrow$$

$$Q_y = (R_{Ay} + R_{Cy} - P) \cdot \cos(\theta_3) = (P - R_{Cy} + R_{Cy} - P) \cdot \cos(\theta_3) = 0 \Rightarrow Q_y = 0$$

$$\sum m_x(z_3) = M_A + z_3 \cdot R_{Ay} - (z_3 - a) \cdot P + (z_3 - b) \cdot R_{Cy} + M_x(z_3) = 0$$

$$M_x(z_3) = -M_A - z_3 R_{Ay} + (z_3 - a)P - (z_3 - b)R_{Cy}$$

$$M_x(z_3) = -(b \cdot R_{Cy} - a \cdot P) - z_3 \cdot (P - R_{Cy}) + (z_3 - a) \cdot P - (z_3 - b) \cdot R_{Cy} = 0$$

$$M_x(z_3) = 0 \quad (19)$$

Учитывая граничные условия :

$$\sin(\theta_1)_{z_1=a} = \sin(\theta_2)_{z_2=a} \quad ; \quad \sin(\theta_1)_{z_1=a} = \frac{-1}{2 \cdot A_1} \cdot [-(A + A_1 \cdot a)]^2 + \frac{A^2}{2 \cdot A_1}$$

$$\sin(\theta_2)_{z_2=a} = \frac{1}{2 \cdot A_2} [-A_2 \cdot (b - z_2)]^2 + \sin \theta_2(b); \quad (\theta_2(b), \theta_1(a) = \theta_2(a) - \text{определяется экспериментом})$$

$$\left(\frac{d\theta_1}{dS_1} \right)_{z_1=a} = \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)_{z_2=a}$$

R_{Cy} , $E \cdot I_x$ определяются сравнением и косвенным измерением, с использованием формул выведенных на Mathcad 11.

III. Экспериментальная часть

Эксперимент : ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ ОДИН РАЗ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ. (УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО)



Рис. 4. Цифровой штангенциркуль (точность 0,01 мм)



Рис. 5. Транспортир-угломер



Рис. 6. Электронные Весы (точность 0,01 г)



Рис. 7. «Smart Timer»



Рис. 8. Установка Воздушные рельсы (научно-исследовательская фирма «PASCO»).

Цель эксперимента. Доказательство правильности произведённых теоретических расчётов.

Описание эксперимента : Данная упругая балка (упругая линия-образец китайской линейки рулетки) гибкость и упругость которой позволяет использовать её в качестве модели для этого эксперимента, жёстко закреплена слева. Справа действует свободно опертая опора, движение которой вдоль по оси «Z» осуществляется без трения за счёт воздуха подаваемого через дырочки установки Воздушные рельсы. Рельсы чётко отгоризонтированы специальным прибором «Smart Timer» так что движущаяся платформа не набирает ускорение. Влияние силы тяжести балки по направлению движения нет, так как сама сила тяжести направлена перпендикулярно и движению свободной опоры и плоскости изменения формы балки. Поперечная сила действующая на балку есть сила натяжения нити осуществляемая силой тяжести массы перекинутой через ролик (момент силы трения на оси ролика – пренебрежимо мал). Точка приложения силы P (сила натяжения нити которая всегда перпендикулярна оси «Z») смещается от $\eta_1 \cdot L$ на расстояние a , свободная опора от L на расстояние b , длина которых измеряется штангенциркулем. Сами же $\eta_1 \cdot L$; L ; $\eta_2 \cdot L$ изменяются. Таким образом, создаётся модель приближённая к теоретической для изучения поведения упругой балки при воздействии на него поперечной силы при заданных экспериментом условиях.

Таблица 1. Экспериментальные данные.

№ Экс.	$E(I)$	L (м)	$\eta_1 \cdot L$ (м)	$\eta_2 \cdot L$ (м)	a (м)	b (м)	$\theta_2(a)$ ($^\circ$)	$\theta_2(b)$ ($^\circ$)	$EI_x \times 10^{-4}$ ($\dot{I} \cdot i^2$)	$\frac{[F(\phi 2b, k2) - F(\phi 2a, k2)]}{\beta_2 \cdot (L - \eta_1 \cdot L)}$ $\alpha \approx \delta \approx \alpha \approx \alpha \leq z_2 \leq b$
1	0,413756	0,13203	0,08135	0,04382	0,06570	0,08526	-18 $^\circ$	-86 $^\circ$	0,7388160	1,185082365076138
2	0,443744	0,13215	0,04434	0,04434	0,03097	0,09930	+38 $^\circ$	-50 $^\circ$	0,9892824	0,883988055027855
3	1,12847	0,13217	0,02157	0,04447	0,01558	0,10904	+58 $^\circ$	-40 $^\circ$	0,98812641	0,880279805860471
4	0,24794	0,12175	0,10118	0,03945	0,09944	0,11308	-27 $^\circ$	-40 $^\circ$	0,99425306	0,823510893661850
5	0,14994	0,10101	0,08337	0,05922	0,08266	0,09888	-12 $^\circ$	-17 $^\circ$	1,800445241	0,982089552437484
6	0,442176	0,10101	0,07639	0,05970	0,07170	0,08563	-27 $^\circ$	-56 $^\circ$	0,851955154	0,832913614071853
7	0,442372	0,11926	0,09402	0,05770	0,08744	0,10076	-43 $^\circ$	-67 $^\circ$	1,328425751	1,044204619743993
8	0,637784	0,11890	0,08024	0,05933	0,06709	0,08256	-34 $^\circ$	-71 $^\circ$	1,426937103	0,806247427043727
9	0,637784	0,11889	0,04692	0,05918	0,03012	0,07855	+31 $^\circ$	-61 $^\circ$	1,040644339	0,865468500290922
10	0,246666	0,11887	0,04735	0,05998	0,04056	0,10328	+16 $^\circ$	-39 $^\circ$	1,1125525918	0,957017786986369
11	0,150038	0,11878	0,04716	0,05934	0,04538	0,11275	+13 $^\circ$	-26 $^\circ$	1,0888377407	0,977060066724943
12	1,031058	0,10608	0,03466	0,06037	0,02161	0,07408	+42 $^\circ$	-57 $^\circ$	1,1114580120	0,885725148977007
13	1,03096	0,11557	0,01547	0,05934	0,01377	0,10739	+38 $^\circ$	-25 $^\circ$	1,0363431537	0,9402146233318549
14	1,030568	0,11571	0,05666	0,05887	0,03168	0,05884	+25 $^\circ$	-70 $^\circ$	0,94847771249	0,6806901786885975
15	0,248038	0,09516	0,07262	0,08078	0,07101	0,08972	-15 $^\circ$	-26 $^\circ$	1,69528001375	0,9138146506502298
16	0,542038	0,11672	0,01847	0,05919	0,01687	0,11094	+28 $^\circ$	-22 $^\circ$	0,96536102812	0,8681454209043848
17	1,522136	0,11650	0,01088	0,05965	0,00964	0,10837	+37 $^\circ$	-25 $^\circ$	0,87178313623	0,9405682169860227
18	1,52194	0,09486	0,02233	0,08095	0,01425	0,07419	+48 $^\circ$	-45 $^\circ$	1,02057940529	0,8938483605092659
19	1,521646	0,09520	0,03784	0,08028	0,01796	0,05387	+42 $^\circ$	-71 $^\circ$	0,91325067907	0,9142002961564910
20	1,032528	0,09497	0,05592	0,08040	0,04097	0,05646	-13 $^\circ$	-74 $^\circ$	0,9824741605	0,7391244831429472
21	0,541548	0,09535	0,05604	0,08148	0,04743	0,06998	0 $^\circ$	-64 $^\circ$	0,785471557075	0,8393335794396218
22	0,541744	0,09467	0,07252	0,08124	0,06722	0,08123	-26 $^\circ$	-59 $^\circ$	0,92585426230	0,9664223275420716
23	0,248038	0,09516	0,07262	0,08078	0,07101	0,08972	-15 $^\circ$	-26 $^\circ$	1,69528001375	0,9138146506502298
								$\langle EI_x \rangle$	$1,04 \cdot 10^4 (\dot{I} \cdot i^2)$	

Таблица 2. Расчёт и сравнение жёсткости на изгиб EI_x .

№	d(мм)	h(мм)
1	5,47	0,17
2	5,44	0,18
3	5,47	0,16
4	5,59	0,17
5	5,52	0,17
ср		

$$I_x = \frac{h^3 \cdot d}{12}$$

Модуль упругости:

$$0,2 \cdot 10^{11} \frac{H}{m^2} \leq E \leq 0,7 \cdot 10^{11} \frac{H}{m^2}$$

Расчёт:

$$d = 5,47 \text{ мм} = 5,47 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h = 0,17 \text{ мм} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad I_x = \frac{(0,17 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 5,47 \cdot 10^{-3}}{12} = 223,951 \cdot 10^{-17} \text{ м}^4$$

$$EI_x = \underbrace{0,464387299 \cdot 10^{11}}_E \cdot 0,00223951 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \rightarrow EI_x = 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

Размерность величин данные в системе СИ:

$$[P] = H, \quad [E] = \frac{H}{m^2}, \quad [I] = m^4, \quad [\eta] \rightarrow \text{безразм.}$$

Проверка сходимости формул полученных разными методами для обоих участков :

$$0 \leq z_1 \leq a$$

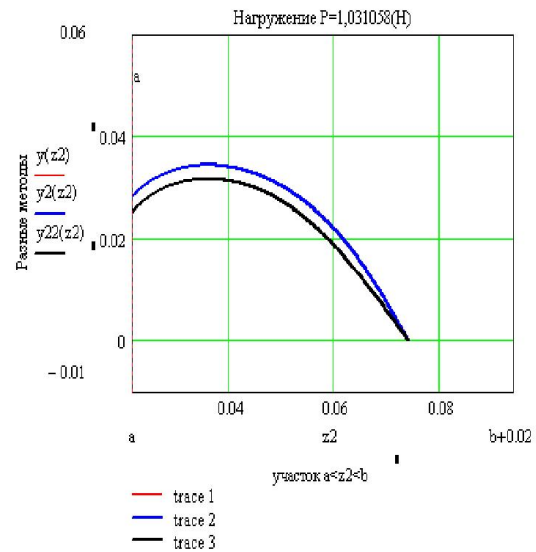
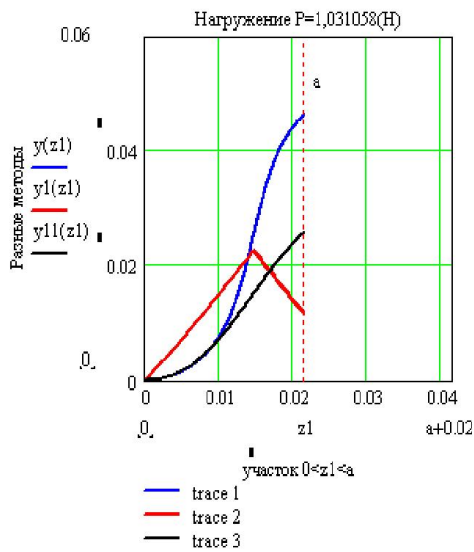
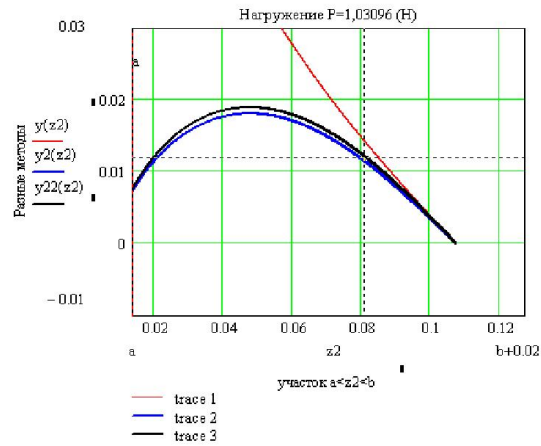
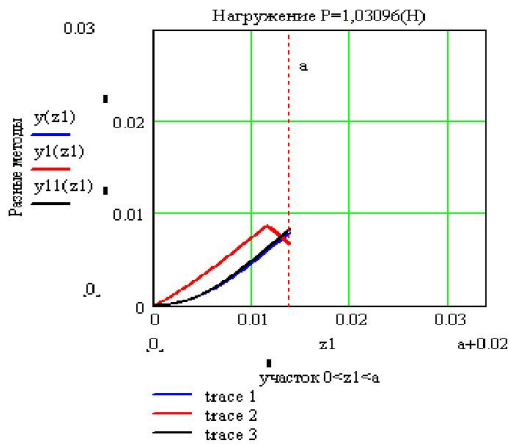
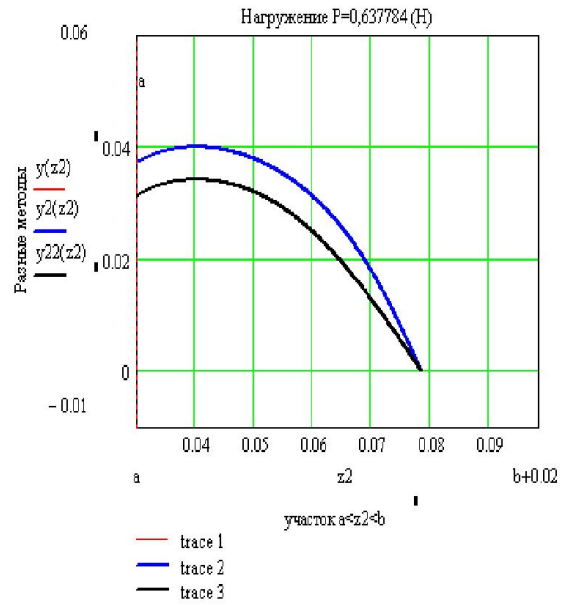
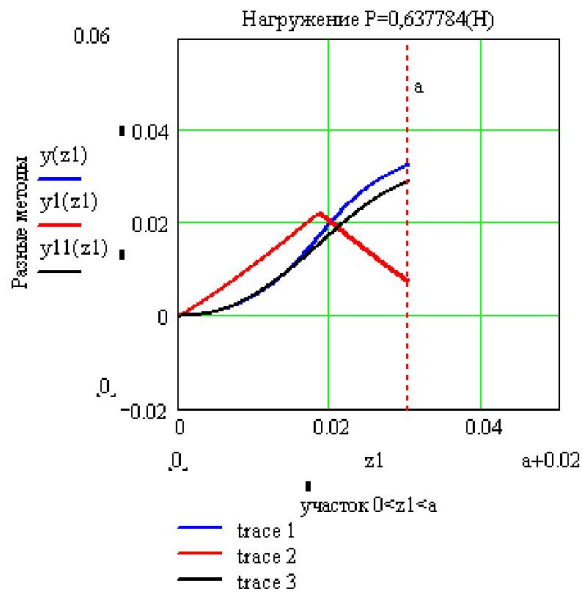
для участка

$$y_1(a) = \frac{-2}{\sqrt{A_1}} \cdot [E(\phi_1(a), k_1) - E(\phi_1(0), k_1)] + [F(\phi_1(a), k_1) - F(\phi_1(0), k_1)] \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - k_1^2)}{\sqrt{A_1}} + \frac{\sin(\theta(z_1^*))}{\sqrt{A_1}} \right]$$

$$y(z_1) = \frac{- \left[\frac{1}{4 \cdot A_1} \cdot \left(\frac{-1}{3} \cdot t_1^3 + A^2 \cdot t_1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{t_1}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arth} \left[\frac{t_1}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right]}{A_1} + C_{y_1}$$

$$C_{y_1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-A^3 \cdot (2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot A_1^2 \cdot \text{Arth} \left[\frac{A}{(2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot (-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot A_1^2 \cdot \text{Arth} \left[\frac{A}{(-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot (2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A_1^2 \cdot (2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cdot A_1 + A^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y_{11}(z_1) = \frac{-1}{A_1} \cdot \left[\frac{-1}{6 \cdot A_1} \cdot t_1^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{A_1} \cdot t_1 - \frac{1}{56 \cdot A_1^3} \cdot t_1^7 + \frac{3}{40} \cdot \frac{A^2}{A_1^3} \cdot t_1^5 - \frac{1}{8} \cdot \frac{A^4}{A_1^3} \cdot t_1^3 + \frac{1}{8} \cdot \frac{A^6}{A_1^3} \cdot t_1 \right] + \frac{1}{A_1} \cdot \left[\frac{-1}{3 \cdot A_1} \cdot A^3 - \frac{2}{35 \cdot A_1^3} \cdot A^7 \right]$$



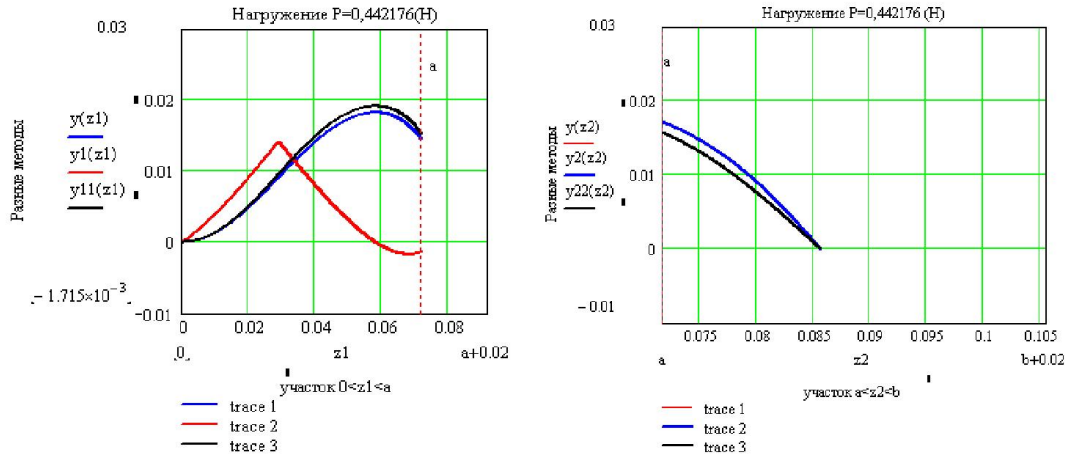


Рис. 9. Сходимость функций от разных методов.

для участка $a \leq z_2 \leq b$

$$-y_2(a) = \frac{2}{\sqrt{-A_2}} \cdot [E(\phi_2(b), k_2) - E(\phi_2(a), k_2)] + [F(\phi_2(b), k_2) - F(\phi_2(a), k_2)] \cdot \left[\frac{\sin(\theta_2(b))}{\sqrt{-A_2}} - \frac{2 \cdot (1 - k_2^2)}{\sqrt{-A_2}} \right]$$

$$y(z_2) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot \sin(\theta_b) \cdot t_2 + \frac{1}{6 \cdot A_2^2} \cdot t_2^3 + \frac{1}{4 \cdot (\sin(\theta_b) \cdot A_2 + A_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \arctg \left[\frac{t_2}{(\sin(\theta_b) \cdot A_2 + A_2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{4 \cdot (\sin(\theta_b) \cdot A_2 - A_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \arctg \left[\frac{t_2}{(\sin(\theta_b) \cdot A_2 - A_2)^{\frac{1}{2}}} \right] + C_{y_2}$$

$$C_{y_2} = 0$$

$$y_{22}(z_2) = \frac{1}{A_2} \cdot \left[\frac{1}{56 \cdot A_2^2} \cdot t_2^7 + \frac{3}{20} \cdot \frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2^2} \cdot t_2^5 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sin^2(\theta_2(b))}{A_2} + \frac{\sin^2(\theta_2(b))}{A_2} \right) \cdot t_2^3 + (1 + \sin^2(\theta_2(b))) \cdot \sin(\theta_2(b)) \cdot t_2 \right] + \frac{C_{y_2}}{0}$$

Формулы выведенные методом согласующимся с методом эллиптических параметров [5] для удовлетворительной сходимости требуют в зависимости нагружения дополнительных коэффициентов [4], относительно хорошо ведёт себя участок $\frac{[F(\phi 2b, k 2) - F(\phi 2a, k 2)]}{\beta 2 \cdot (L - \eta_1 \cdot L)} = 1$, для участка $a \leq z_2 \leq b$

При малых углах текущих точек не плохо работает формула выведенная через равенство среднеарифметического к среднегеометрическому (условие $M(\theta) \approx 2$)

Наиболее предпочтительнее по сходимости и по стыковке двух участков выглядит формула выведенная аналитическим методом.

$$y_{11}(z_1) = \frac{-1}{A_1} \cdot \left[\frac{-1}{6 \cdot A_1} \cdot t_1^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{A_1} \cdot t_1 - \frac{1}{56 \cdot A_1^3} \cdot t_1^7 + \frac{3}{40} \cdot \frac{A^2}{A_1^3} \cdot t_1^5 - \frac{1}{8} \cdot \frac{A^4}{A_1^3} \cdot t_1^3 + \frac{1}{8} \cdot \frac{A^6}{A_1^3} \cdot t_1 \right] + \frac{1}{A_1} \cdot \left[\frac{-1}{3 \cdot A_1} \cdot A^3 - \frac{2}{35 \cdot A_1^3} \cdot A^7 \right]$$

$$y_{22}(z_2) = \frac{1}{A_2} \cdot \left[\frac{1}{56 \cdot A_2^2} \cdot t_2^7 + \frac{3}{20} \cdot \frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2^2} \cdot t_2^5 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sin^2(\theta_2(b))}{A_2} + \frac{\sin^2(\theta_2(b))}{A_2} \right) \cdot t_2^3 + (1 + \sin^2(\theta_2(b))) \cdot \sin(\theta_2(b)) \cdot t_2 \right] + \frac{C_{y_2}}{0}$$

Вывод:

Сравнение рассчитанных интегральных и измеренных данных:

$$\int_0^{\eta_1 \cdot L} dS_1 = \int_0^a \left[1 + \left(\frac{-1}{2 \cdot A_1} \cdot [-(A + A_1 \cdot z_1)]^2 + \frac{A^2}{2 \cdot A_1} \right)^2 \right] \cdot dz_1 \Rightarrow \eta_1 \cdot L = a + \left(\frac{1}{20} \cdot A_1^2 \cdot a^5 + \frac{1}{4} \cdot A \cdot A_1 \cdot a^4 + \frac{1}{3} \cdot A^2 \cdot a^3 \right)$$

$$L - \eta_1 \cdot L = \frac{-1}{A_2} \cdot \left(t_2 + \frac{1}{20 \cdot A_2^2} \cdot t_2^5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2} \cdot t_2^3 + \sin^2(\theta_2(b)) \cdot t_2 \right) \quad (20)$$

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{\int_0^a f(z_1) dz_1 - \eta_1 \cdot L}{\eta_1 \cdot L} \right| \times 100\% \qquad \varepsilon_2 = \left| \frac{\int_a^b f(z_2) dz_2 - (L - \eta_1 \cdot L)}{(L - \eta_1 \cdot L)} \right| \times 100\%$$

Таблица 3. Сравнение экспериментальных и расчётных данных.

№	$P(H)$	$(\eta_1 \cdot L - 0)(i)$	$\int_0^a f(z_1) dz_1$	$\varepsilon_1 = \left \frac{\int_0^a f(z_1) dz_1 - \eta_1 \cdot L}{\eta_1 \cdot L} \right \times 100\%$	$(L - \eta_1 \cdot L)(M)$	$\int_a^b f(z_2) dz_2$	$\varepsilon_2 = \left \frac{\int_a^b f(z_2) dz_2 - (L - \eta_1 \cdot L)}{(L - \eta_1 \cdot L)} \right \times 100\%$
1	0,413756	0,08135	0,07375	9,34	0,05068	0,03346	34,0
2	0,443744	0,04434	0,04270	3,7	0,08781	0,086180	1,9
3	1,12847	0,02157	0,02367	3,7	0,11314	0,10876	2,3
4	0,24794	0,10118	0,1055	4,31	0,02057	0,01830	11,0
5	0,14994	0,08337	0,08513	2,1	0,01764	0,01723	2,35
6	0,442176	0,07639	0,07873	3,1	0,02462	0,02373	13,0
7	0,442372	0,09402	0,1008	7,2	0,02524	0,02239	11,0
8	0,637784	0,08024	0,0887	10,5	0,03866	0,02508	35,1
9	0,637784	0,04692	0,04365	7,0	0,07198	0,06493	9,8
10	0,246666	0,04735	0,04861	2,66	0,07152	0,07387	3,28
11	0,150038	0,04716	0,05061	7,3	0,07162	0,07314	2,12
12	1,031058	0,03466	0,03409	1,6	0,07142	0,06922	3,1
13	1,03096	0,01547	0,01717	11,0	0,10010	0,10301	3,0
14	1,030568	0,05666	0,04949	12	0,05905	0,03832	35,1
15	0,248038	0,07262	0,07712	6,2	0,02254	0,02106	6,6
16	0,542038	0,01847	0,01905	3,14	0,09825	0,10053	2,32
17	1,522136	0,01088	0,01110	1,99	0,10562	0,10744	1,72
18	1,52194	0,02233	0,02510	10,0	0,07253	0,07402	2,05
19	1,521646	0,03784	0,02555	33,7	0,05736	0,02437	12,4
20	1,032528	0,05592	0,05191	7,17	0,03905	0,03350	14,8
21	0,541548	0,05604	0,05574	0,53	0,03931	0,04024	2,37
22	0,541744	0,07252	0,07742	6,8	0,02215	0,02169	2,1
23	0,248038	0,07262	0,07712	6,2	0,02254	0,02106	6,55
24							

Статистический обзор и малые относительные ошибки дают основание полагать, что пределах условий эксперимента выведенные формулы работают удовлетворительно.

Что касается искомых зависимостей поставленной задачи, в виду громозкости удаётся найти:

$$\eta_1 \cdot L = a + \left(\frac{1}{20} \cdot A_1^2 \cdot a^5 + \frac{1}{4} \cdot A \cdot A_1 \cdot a^4 + \frac{1}{3} \cdot A^2 \cdot a^3 \right) \Rightarrow$$

$$b_{1,2} = \left[\frac{1}{40 \cdot a^2} \cdot \frac{15 \cdot a^3 \cdot R_{Cy} + 25 \cdot a^3 \cdot P + (-15 \cdot a^6 \cdot R_{Cy}^2 + 30 \cdot a^6 \cdot R_{Cy} \cdot P - 15 \cdot a^6 \cdot P^2 + 4800 \cdot a \cdot \eta_1 \cdot L \cdot EI_x^2 - 4800 \cdot a^2 \cdot EI_x^2)^{\frac{1}{2}}}{R_{Cy}} \right]$$

$$\left[\frac{1}{40 \cdot a^2} \cdot \frac{15 \cdot a^3 \cdot R_{Cy} + 25 \cdot a^3 \cdot P - (-15 \cdot a^6 \cdot R_{Cy}^2 + 30 \cdot a^6 \cdot R_{Cy} \cdot P - 15 \cdot a^6 \cdot P^2 + 4800 \cdot a \cdot \eta_1 \cdot L \cdot EI_x^2 - 4800 \cdot a^2 \cdot EI_x^2)^{\frac{1}{2}}}{R_{Cy}} \right]$$

$$b = b_2 = \frac{1}{40 \cdot a^2} \cdot \frac{15 \cdot a^3 \cdot R_{Cy} + 25 \cdot a^3 \cdot P - (-15 \cdot a^6 \cdot R_{Cy}^2 + 30 \cdot a^6 \cdot R_{Cy} \cdot P - 15 \cdot a^6 \cdot P^2 + 4800 \cdot a \cdot \eta_1 \cdot L \cdot EI_x^2 - 4800 \cdot a^2 \cdot EI_x^2)^{\frac{1}{2}}}{R_{Cy}} \quad (21)$$

Однако независимо от сходимости функций полученных методом согласующимся с методом эллиптических параметров (требуется больше коэффициентов) для двух участков, интеграл:

$$\frac{[F(\phi 2b, k2) - F(\phi 2a, k2)]}{\beta 2 \cdot (L - \eta_1 \cdot L)} = 1 \text{ сходится быстрее. Таблица 1.}$$

Графики сходимости функций дуги:

$$S(z_2) = \frac{1}{A_2} \cdot \left(t_2 + \frac{1}{20 \cdot A_2^2} \cdot t_2^5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(\theta_2(b))}{A_2} \cdot t_2^3 + \sin^2(\theta_2(b)) \cdot t_2 \right) + L$$

функция дуги полученная аналитическим методом.

$$S_2(z_2) = \frac{-[F(\phi 2b, k2) - F(\phi 2a, k2)]}{\beta 2} + L$$

функция дуги полученная методом согласующимся с методом эллиптических параметров [5]

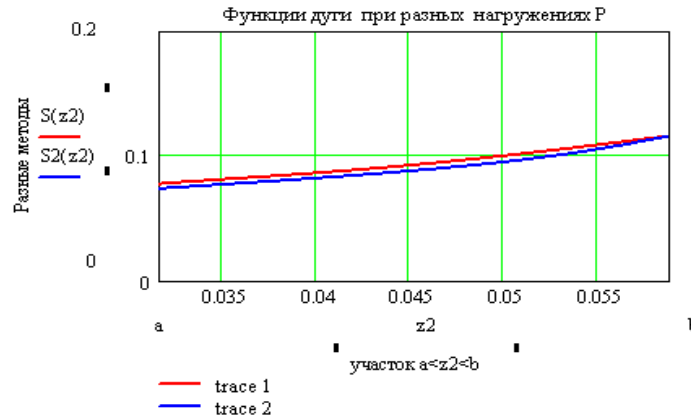


Рис. 10. Функции дуги ,полученные разными методами.

$$\frac{[F(\phi 2b, k2) - F(\phi 2a, k2)]}{\beta 2 \cdot (L - \eta_1 \cdot L)} = 1 \Rightarrow R_{Cy} = \frac{-(F(\phi 2b, k2) - F(\phi 2a, k2))^2}{(-L + \eta_1 L)^2} \cdot EI_x$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{FF\text{-переобозначим}}$

$$R_{Cy} = FF \cdot EI_x$$

Из граничных условий: $\sin(\theta_1(a)) = \sin(\theta_2(a)) \Rightarrow R_{Cy} = \frac{P \cdot a^2 - 2 \cdot \sin(\theta_2(b)) \cdot EI_x}{b^2}$

А также, относительно экспериментально измеренного угла стыка двух участков имеем:

$$\sin(\theta_1(a)) = \frac{-1}{2 \cdot A_1} \cdot [-(A + A_1 \cdot a)]^2 + \frac{A^2}{2 \cdot A_1} \Rightarrow R_{Cy} = \frac{-(-2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI_x + P \cdot a^2)}{a \cdot (-2 \cdot b + a)}$$

$$\sin(\theta_2(a)) = \frac{1}{2 \cdot A_2} \cdot [-A_2 \cdot (b - a)]^2 + \sin(\theta_2(b)) \Rightarrow R_{Cy} = -2 \cdot EI_x \cdot \frac{-\sin(\theta_2(a)) + \sin(\theta_2(b))}{b^2 - 2 \cdot b \cdot a + a^2}$$

$a(P)$, $b(P)$, а также зависимость $b(P)$ от $a(P) \Rightarrow b(P) = G(a(P))$.

$$FF \cdot EI_x = -2 \cdot EI_x \frac{-\sin(\theta_2(a)) + \sin(\theta_2(b))}{b^2 - 2 \cdot b \cdot a + a^2} \Rightarrow b = \sqrt{-2 \cdot \frac{-\sin(\theta_2(a)) + \sin(\theta_2(b))}{FF}} + a$$

$$FF \cdot EI_x = \frac{-(-2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI_x + P \cdot a^2)}{a \cdot (-2 \cdot b + a)} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \cdot \frac{FF \cdot EI_x \cdot a^2 - 2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI_x + P \cdot a^2}{FF \cdot EI_x \cdot a} \quad (22)$$

$$\frac{P \cdot a^2 - 2 \cdot \sin(\theta_2(b)) \cdot EI_x}{b^2} = 2 \cdot EI_x \frac{-\sin(\theta_2(a)) + \sin(\theta_2(b))}{b^2 - 2 \cdot b \cdot a + a^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{-2 \cdot \frac{-\sin(\theta_2(a)) + \sin(\theta_2(b))}{FF}} + a = \frac{1}{2} \cdot \frac{FF \cdot EI_x \cdot a^2 - 2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI_x + P \cdot a^2}{FF \cdot EI_x \cdot a} \quad \text{с учётом граничных условий}$$

$$a = \left[\frac{1}{2 \cdot (-FF \cdot EI_x + P)} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sin(\theta_2(a)) - \sin(\theta_2(b))}{FF} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot FF \cdot EI_x + 2 \cdot (-2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI^2 \cdot FF + 2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI_x \cdot P)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ \left. \frac{1}{2 \cdot (-FF \cdot EI_x + P)} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sin(\theta_2(a)) - \sin(\theta_2(b))}{FF} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot FF \cdot EI_x - 2 \cdot (-2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI^2 \cdot FF + 2 \cdot \sin(\theta_1(a)) \cdot EI_x \cdot P)^{\frac{1}{2}} \right] \right]$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{a_{\text{расчёт}} - a_{\text{изм.}}}{a_{\text{изм.}}} \right| \times 100\% \quad \varepsilon_b = \left| \frac{b_{\text{расчёт}} - b_{\text{изм.}}}{b_{\text{изм.}}} \right| \times 100\%$$

Проверка последних формул, даёт основание, что смещение $\Delta_1(\mathbf{P})$, $\Delta_2(\mathbf{P})$ есть

$$\Delta_1(P) = \eta_1 L - \frac{1}{2 \cdot (EI_x \cdot FF - P)} \quad (23)$$

$$\cdot \left[-2 \cdot EI_x \cdot \left[\frac{-(-\sin(\theta_2(a)) + \sin(\theta_2(b)))}{FF} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot FF - 2 \cdot (-2 \cdot EI^2 \cdot FF \cdot \sin(\theta_2(b)) + 2 \cdot P \cdot \sin(\theta_2(a)) \cdot EI_x \cdot P)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Delta_2 = L - \frac{1}{2 \cdot (-2 \cdot \sin(\theta_2(a)) \cdot EI_x + P \cdot a^2)} \quad (24)$$

$$\cdot \left[2 \cdot P \cdot a^2 - 4 \cdot EI_x \cdot \sin(\theta_2(b)) + 2 \cdot (-2 \cdot EI_x \cdot \sin(\theta_2(b)) \cdot P \cdot a^2 + 4 \cdot EI_x^2 \cdot \sin^2(\theta_2(b)) - 4 \cdot \sin(\theta_2(a)) \cdot EI_x^2 \cdot \sin(\theta_2(b)) + 2 \cdot \sin(\theta_2(a)) \cdot EI_x \cdot P \cdot a^2)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot a$$

Приложение 1. (Таблица интегралов, Г.Б. Двайт на языке Mathcad 11.)

Для участка $0 \leq z_1 \leq a$

$$A12 := \frac{1}{2} \quad A14a := \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \cdot \sin(\phi 1a)^2 \quad A16a := \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \cdot \sin(\phi 1a)^2 + \frac{1}{6} \cdot \sin(\phi 1a)^4$$

$$A18a := \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 1a)^2 + \frac{7}{6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 1a)^4 + \frac{1}{8} \cdot \sin(\phi 1a)^6$$

$$A20a := \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \sin(\phi 1a)^2 + \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \sin(\phi 1a)^4 + \frac{7}{8 \cdot 10} \cdot \sin(\phi 1a)^6 + \frac{1}{10} \cdot \sin(\phi 1a)^8$$

$$A140 := \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \cdot \sin(\phi 10)^2 \quad A160 := \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \cdot \sin(\phi 10)^2 + \frac{1}{6} \cdot \sin(\phi 10)^4$$

$$A180 := \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 10)^2 + \frac{7}{6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 10)^4 + \frac{1}{8} \cdot \sin(\phi 10)^6$$

$$A200 := \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \sin(\phi 10)^2 + \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \sin(\phi 10)^4 + \frac{7}{8 \cdot 10} \cdot \sin(\phi 10)^6 + \frac{1}{10} \cdot \sin(\phi 10)^8$$

$$F(\phi 10, k1) := \left[\frac{2 \cdot \phi 10}{3.14} \cdot K1 - \sin(\phi 10) \cdot \cos(\phi 10) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A12 \cdot k1^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot A140 \cdot k1^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A160 \cdot k1^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A180 \cdot k1^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot A200 \cdot k1^{10} \right) \right]$$

$$F(\phi 1a, k1) := \frac{2 \cdot \phi 1a}{3.14} \cdot K1 - \sin(\phi 1a) \cdot \cos(\phi 1a) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A12 \cdot k1^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot A14a \cdot k1^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A16a \cdot k1^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A18a \cdot k1^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot A20a \cdot k1^{10} \right)$$

$$K1 := \frac{3.14}{2} \cdot \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \cdot k1^2 + \frac{1^2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 4^2} \cdot k1^4 + \frac{1^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot k1^6 + \frac{1^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot k1^8 + \frac{1^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdot k1^{10} + \frac{1^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} \cdot k1^{12} \right)$$

$$E1 := \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} \cdot k1^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} \cdot k1^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot k1^6 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot k1^8 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdot k1^{10} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} \cdot k1^{12} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} \cdot k1^{14} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 15}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2 \cdot 16^2} \cdot k1^{16} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 15^2 \cdot 17}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2 \cdot 16^2 \cdot 18^2} \cdot k1^{18} \right)$$

$$E(\phi 10, k1) := \frac{2 \cdot \phi 10}{\pi} \cdot E1 + \sin(\phi 10) \cdot \cos(\phi 10) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A12 \cdot k1^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot A140 \cdot k1^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A160 \cdot k1^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A180 \cdot k1^8 \right)$$

$$E(\phi 1a, k1) := \frac{2 \cdot \phi 1a}{\pi} \cdot E1 + \sin(\phi 1a) \cdot \cos(\phi 1a) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A12 \cdot k1^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot A14a \cdot k1^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A16a \cdot k1^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A18a \cdot k1^8 \right)$$

Для участка $a \leq z_2 \leq b$

$$A22 := \frac{1}{2} \quad A24a := \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \cdot \sin(\phi 2a)^2 \quad A26a := \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \cdot \sin(\phi 2a)^2 + \frac{1}{6} \cdot \sin(\phi 2a)^4$$

$$A28a := \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 2a)^2 + \frac{7}{6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 2a)^4 + \frac{1}{8} \cdot \sin(\phi 2a)^6$$

$$A24b := \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \cdot \sin(\phi 2b)^2 \quad A26b := \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \cdot \sin(\phi 2b)^2 + \frac{1}{6} \cdot \sin(\phi 2b)^4$$

$$A28b := \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 2b)^2 + \frac{7}{6 \cdot 8} \cdot \sin(\phi 2b)^4 + \frac{1}{8} \cdot \sin(\phi 2b)^6$$

$$F(\phi_{2a}, k_2) := \frac{2 \cdot \phi_{2a}}{\pi} \cdot K_2 - \sin(\phi_{2a}) \cdot \cos(\phi_{2a}) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A_{22} \cdot k_2^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot A_{24a} \cdot k_2^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A_{26a} \cdot k_2^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A_{28a} \cdot k_2^8 \right)$$

$$F(\phi_{2b}, k_2) := \frac{2 \cdot \phi_{2b}}{\pi} \cdot K_2 - \sin(\phi_{2b}) \cdot \cos(\phi_{2b}) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A_{22} \cdot k_2^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot A_{24b} \cdot k_2^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A_{26b} \cdot k_2^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A_{28b} \cdot k_2^8 \right)$$

$$E(\phi_{2a}, k_2) := \frac{2 \cdot \phi_{2a}}{\pi} \cdot E_2 + \sin(\phi_{2a}) \cdot \cos(\phi_{2a}) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A_{22} \cdot k_2^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot A_{24a} \cdot k_2^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A_{26a} \cdot k_2^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A_{28a} \cdot k_2^8 \right)$$

$$K_2 := \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \cdot k_2^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot k_2^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot k_2^6 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot k_2^8 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdot k_2^{10} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} \cdot k_2^{12} + \right. \\ \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} \cdot k_2^{14} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 15^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2 \cdot 16^2} \cdot k_2^{16} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 15^2 \cdot 17^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2 \cdot 16^2 \cdot 18^2} \cdot k_2^{18} \right)$$

$$E(\phi_{2b}, k_2) := \frac{2 \cdot \phi_{2b}}{\pi} \cdot E_2 + \sin(\phi_{2b}) \cdot \cos(\phi_{2b}) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A_{22} \cdot k_2^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot A_{24b} \cdot k_2^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot A_{26b} \cdot k_2^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot A_{28b} \cdot k_2^8 \right)$$

$$E_2 := \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} \cdot k_2^2 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot k_2^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot k_2^6 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot k_2^8 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdot k_2^{10} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} \cdot k_2^{12} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} \cdot k_2^{14} \right)$$

Литература:

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. «Наука», Москва, 1966. – С. 216-221.
2. Кошелев А.И., Нарбут М.А. Механика деформируемого твёрдого тела. - «Электронный учебник». Санкт-Петербург-2002 - С. 93-101.
3. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов. Теория упругости и пластичности. - «Высшая школа». - Москва, 2000. – С. 68-109.
4. Двайт Г.Б. Таблица интегралов. - «Наука», Москва, 1973). – С.150-160.
5. Попов Е.П. Теория и расчёт гибких упругих стержней. «Наука», Москва, 1986. – С. 292.

Рецензент: д.т.н., профессор Маймеков З.К.