Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т., Макеева Ш.А.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т., Макеева Ш.А.

СУУ ТАМЧЫЛАРЫНЫН АВТОМОДЕЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШ ТЕҢДЕМЕСИ

T.B. Duishenaliev, B.T. Mekenbaev, Sh.A. Makeeva

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF SHALLOW WATER EQUATIONS

УДК: 532.522

В работе обсуждаются обобщения классической теории мелкой воды над ровным дном. Найдено автомодельное решения уравнений мелкой воды в рамках модели идеальной жидкости.

Ключевые слова: *автомодель, сила тяжести, несжимаемая жидкость.*

Бул иште жер түбүндөгү суулардын класссикалык теориянын негизинде чыгаруу теңдемеси көрсөтүлгөн. Идеалдуу суюктуктардын негизинде жер алдындагы сууларга автомодель тендемеси табылды.

Негизги сөздөр*: автомодель, оордук күчү, кысылбоочу суюктук.*

The paper discusses the generalization of the classical theory of shallow water flows over a flat bottom. Found self-shallow water equations in the model of an ideal fluid

Key words: *the car, the force of gravity, an incompressible fluid.*

Введение

Рассматривается канал постоянного поперечного сечения с постоянным наклоном дна, простирающийся до бесконечности вдоль оси *x*. В данном канале в поле силы тяжести точечно несжимаемая жидкость. Предположим, что жидкость лишена внутреннего трения, трения о стенки и дно канала, а уровень жидкости над дном канала *h* является малой величиной по сравнению с характерными размерами течения, размерами неровностей дна и т.п. Течение жидкости характеризуется одной пространственной переменной *x* и зависит от времени *t*.

Система уравнений, описывающая течение жидкости в канале, имеет вид [1,2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

Мы будем искать решение системы (1), предполагая, что задача является, так называемой, автомодельной. Понятие автомодельности (самоподобия) является исключительно плодотворным в решении многих задач математической физики и, в частности, газодинамики. Задача считается автомодельной, если ее решение можно представить в виде функций от некоторых комбинаций независимых переменных.

В данном случае принцип автомодельности позволит нам свести систему одномерных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Признаки автомодельности основываются обычно на анализе размерностей физических величин, участвующих в задаче. Здесь слово размерность употреблено в физическом смысле, а не в качестве числа независимых переменных. Возможность представления задачи о волне разрежения в автомодельном виде сводится к тому, что в ней нет характерных величин, имеющих размерность длины и времени. Единственная величина, значение которой присутствует изначально – это скорость звука C_0, имеющая размерность *x/t*. Примем эту дробь в качестве новой независимой переменной:

$$\varepsilon = x/t. \qquad (2)$$

Учтем связь между дифференциальными операторами по старым переменным x, t и новой переменной ε:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = = -\frac{x}{t^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{t}\cdot\frac{\partial}{\partial \varepsilon}. \qquad (3)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1) и умножая на *t*, в результате мы получили систему двух линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (u-\varepsilon)\dfrac{\partial h}{\partial \varepsilon} + h\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon} = 0, \\ g\dfrac{\partial h}{\partial \varepsilon} + (u-\varepsilon)\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon} = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

относительно производных $\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon}, \dfrac{\partial h}{\partial \varepsilon}$.

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} u-\xi & h \\ g & u-\xi \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

В результате после очевидных упрощений получаем:

$$h = \frac{1}{g}(u-\varepsilon)^2 \qquad (6)$$

Несложное преобразование уравнения (6) дает

$$\varepsilon = u \pm c \tag{7}$$

где $c = \sqrt{gh}$.

Теперь первое уравнение системы уравнений (4) умножим на $\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}$ и второе на $\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}$. И после чего, сложив эти уравнения получим

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)^2 = g\left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}\right)^2 \tag{8}$$

Обратно переходя на декартовую систему координат из (8) имеем

$$\begin{cases} h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = g\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \\ h\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = g\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 \end{cases} \tag{9}$$

После несложных преобразований получим следующее уравнение

$$\begin{cases} g\frac{\partial h}{\partial x} = \pm c\frac{\partial u}{\partial x} \\ g\frac{\partial h}{\partial t} = \pm c\frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \tag{10}$$

Уравнения непрерывности и закон сохранения импульса может быть записано в форме характеристического уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

А также, можно получить следующее

$$h\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = g\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

Отсюда следует, что высота потока должно удовлетворять следующее условие

$$\frac{dh}{du} = \pm\frac{c}{g} \tag{13}$$

Решение этого дифференциального уравнения определяет связь между скоростью и высоты потока записанные в форме

$$u = \pm 2\sqrt{gh} + const$$

Которые выполняются на характеристиках (7).

Вставляя (6) в (8), получим квадратное уравнение относительно $\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}$, т.е.

$$3\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)^2 - 8\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right) + 4 = 0 \tag{14}$$

которое имеет два решения

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = 2$$

Проинтегрировав первое решение получим выражения для определения скорости потока

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{3}\varepsilon + d \\ h &= \frac{1}{9g}(3d - \varepsilon)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь *d*-постоянное интегрирование. Второе решение не удовлетворяет уравнению (1).

Рассмотрим задачу, об обрушение плотины [3]. Канал постоянного поперечного сечения, простирающийся до бесконечности в обе стороны, который имеет тонкую перегородку в сечении $x = x_1$ (рис.5). При $x < x_1$вода имеет глубину h , а при $x > x_1$ – глубину h_0 ,причем $h_1 > h_0$.

При $\varepsilon=x/t\leq 0$, $u=u_0=0$ и $h = h_0$ решение имеет вид

$$u = \frac{2}{3}(\varepsilon + c_0) \qquad h = \frac{1}{9g}(2c_0 - \varepsilon)^2$$

где c_0 = gh

Литература:

1. Эглит М.Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. -М.: изд-во Моск. ун-та, 1986. -96 с.
2. Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т.. Барсанаев С.Б., Сарбалиев А.Ш. // Моделирование движение грунтовых потоков на наклонных поверхностях.Известия КГТУ им.И.Раззакова. Б. 2009., №17. Стр. 374-376.
3. Рыскин Н.М., Трубецков. Д. И. Нелинейные волны: Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Физматлит, 2000.– 272 с. (Сер.Современная теория колебаний и волн).– ISBN 5- 02- 15553- 5.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Абдрахманов С.А.