

Дуйшеналиев Т.Б., Искендер Козубай, Макеева Ш.А.

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИЙ, НАПРЯЖЕНИЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В РЯД ТЕЙЛОРА

Дуйшеналиев Т.Б., Искендер Козубай, Макеева Ш.А.

ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЯНЫ ЖАНА АНЫН БӨЛҮКТӨРҮН ЭСЕПТӨӨНҮН АЛГОРИТИМИН ТЕЙЛОРДУН РЯДЫ АРКЫЛУУ ТАБУУ

T.B. Duishenaliev, Iskender Kozubai, Sh.A. Makeeva

USING THE TAYLOR SERIES FOR THE DETERMINATION OF THE MAXIMUM AND MINIMUM DISPLACEMENT OF THE POINT OF THE STRESS-STRAIN STATE STRUCTURES

УДК: 514.763.53:519.633.2:539.378

Бул макалада серпилгичтүү телонун моделин Кошинин тензору аркылуу түзүү көрсөтүлгөн. Эсептөөнүн негиздери тегиз чөйрөлөр үчүн өтө маанилүү. Жылышуунун чоң жана эң кичине маанилерин Тейлордун катарлары менен аныктайбыз. Конструкциялардын математикалык моделин MATLABдын жардамы менен эсептейбиз.

Негизги сөздөр: *коши тензору, айлануу тензору, жылышуу, деформация абалы, толгонуу.*

В данной статье приводим численные эксперименты по моделированию перемещений упругих тел на основе тензора Коши. Численное моделирование является важной составной частью исследований, как на стадии формулировки и изучения моделей деформирования сплошных сред, так и на стадиях анализа и расчётов на прочность конкретных конструктивных элементов и конструкционных материалов. Находим экстремальные точки перемещения с использованием ряда Тейлора. Также приводим математические модели деформирования элементов конструкций, алгоритмы их исследования, примеры расчёта элементов конструкций в MATLAB.

Ключевые слова: *тензор Коши, тензор вращения, перемещение, деформированное состояние, кручение.*

This article presents numerical simulations modeling displacement of elastic bodies on the basis of the Cauchy tensor. Numerical simulation is an important part of research at the stage of formulation and study of deformation models of continuous media, and at the stage of analysis and calculations on the strength of concrete structural elements and structural materials. Find the extreme point of travel using the Taylor series. Also present mathematical models of deformation of structural elements, algorithms for their studies, examples of the calculation of structural elements in MATLAB.

Keywords: *cauchy tensor, the tensor of rotation, displacement, strain state, torsion*

Введение

Исследования закономерностей деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при сложном нагружении имеют принципиальное значение как с точки зрения фундаментальных основ теории упругости, так и в плане практических приложений, связанных с прочностными расчётами конструкций и аппаратов новой техники, подверженных воздействию нагрузок. Эти задачи изучены ещё недостаточно полно. Аналитические решения для такого рода задач возможны только для отдельных (и достаточно простых) расчетных схем. Для численных экспериментов по моделированию перемещений упругих тел на основе тензора Коши используем метод разложение в ряд Тейлора.

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба пластинки равномерно распределенной нагрузкой интенсивности C (см. рис. 1).

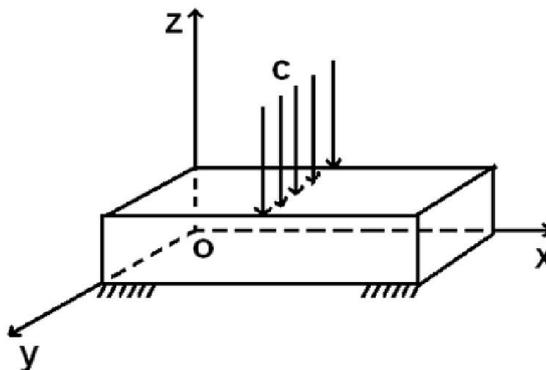


Рис. 1. Пластинка равномерно распределенной нагрузкой интенсивности C .

На верхней основании пластины в направлении оси абсцисс действуют усилия интенсивности C (см. рис. 1). Запишем статические граничные условия (условия Коши на поверхности тела):

Пусть в области V

$$4 \leq x_1 \leq 6, \quad 0 \leq x_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq x_3 \leq 2\pi \quad (1)$$

известен только тензор Коши

$$\varepsilon_{ij} = c \begin{pmatrix} \sin x_2 \cos x_3 & \frac{1}{2}(\sin x_2 \sin x_3 + x_1 \cos x_2 \cos x_3) & \frac{1}{2}(\cos x_2 - x_1 \sin x_2 \sin x_3) \\ \frac{1}{2}(\sin x_2 \sin x_3 + x_1 \cos x_2 \cos x_3) & x_1 \cos x_2 \sin x_3 & \frac{1}{2}x_1 \sin x_2 (\cos x_3 - 1) \\ \frac{1}{2}(\cos x_2 - x_1 \sin x_2 \sin x_3) & \frac{1}{2}x_1 \sin x_2 (\cos x_3 - 1) & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

для удобства x, y, z обозначим через x_1, x_2, x_3

поле перемещения для цилиндра запишем в виде [1]

$$u_1(x) = u_1(x^0) + \omega_2(x^0)(x_2 - x_2^0) + \omega_3(x^0)(x_3 - x_3^0) + c x_1 \cos x_2$$

$$u_2(x) = u_2(x^0) + \omega_{21}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \omega_{23}(x^0)(x_3 - x_3^0) + c x_1 \sin x_2 \quad (3)$$

$$u_3(x) = u_3(x^0) + \omega_{31}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \omega_{32}(x^0)(x_2 - x_2^0) + c x_3$$

где x^0 координаты начальной точки линии интегрирования. В качестве x^0 можно использовать координаты любой точки области V ,

$$u_i(x^0) \text{ и } \omega_{ij}(x^0)$$

постоянные интегрирования, соответствующие параллельному переносу и жесткому повороту тела.

Параллельный перенос и жесткий поворот тела не оказывают влияния на деформации.

Векторы $z_i = x_i - u_i(x)$, $x_i \in V$

Рассматриваются конструкция из алюминия правильной формы. Находим параметры напряженно-деформированного состояния конструкций, а также экстремальные точки поля перемещения с использованием ряда Тейлора. Находим производных поля перемещения внутри объема и на крайних точках (рис.2).

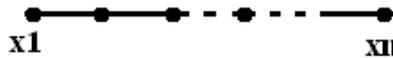


Рис. 2.

Аппроксимация производных

Аппроксимация первой производной функции $\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$ при $x=x_1$:

Разлагаем $\Phi_2 = \Phi(x_2) = \Phi(x_1 + \Delta x)$ и $\Phi_3 = \Phi(r_3) = \Phi(r_1 + \Delta r_2) = \Phi(r_1 + a\Delta r_1)$ в ряд Тейлора около точки $r = r_1$ и ограничиваемся третьими членами разложения:

$$\Phi_2 = \Phi(r_1 + \Delta r_1) \approx \Phi(r_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \cdot \Delta r_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \Big|_{r=r_1} \cdot (\Delta r_1)^2, \quad (4)$$

$$\Phi_3 = \Phi(r_1 + a\Delta r_1) \approx \Phi(r_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \cdot a\Delta r_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \Big|_{r=r_1} \cdot a^2 (\Delta r_1)^2, \quad (5)$$

где $\Delta r_1 = r_2 - r_1$, $\Delta r_2 = r_3 - r_1 = a \Delta r_1$.

Умножаем первое из этих уравнений на $-a^2$ и складываем со вторым:

$$-a^2\Phi_2 + \Phi_3 \approx (1-a^2)\Phi_1 + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot (a-a^2)\Delta r_1, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \approx \frac{a^2\Phi_2 - \Phi_3 - (a^2-1)\Phi_1}{(a^2-a)\Delta r_1}. \quad (7)$$

Аппроксимация первой производной функции $\Phi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)$ при $x=x_n$

Разлагаем $\Phi_{n-1} = \Phi(x_{n-1}) = \Phi(x_n + \Delta x)$ и $\Phi_{n-2} = \Phi(x_{n-2}) = \Phi(x_n - 2\Delta x)$ в ряд Тейлора около точки $x = x_n$ и ограничиваемся третьими членами разложения:

$$\Phi_{n-1} = \Phi(x_n + \Delta x) \approx \Phi(x_n) + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=x_n} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right|_{x=x_n} \cdot (\Delta x)^2, \quad (8)$$

$$\Phi_{n-2} = \Phi(r_1 + 2\Delta r_1) \approx \Phi(r_1) + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot 2\Delta r_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \right|_{r=r_1} \cdot 4(\Delta r_1)^2. \quad (9)$$

Умножаем первое из этих уравнений на -4 и складываем со вторым:

$$-4\Phi_2 + \Phi_3 \approx (1-4)\Phi_1 + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot (2-4)\Delta r_1, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=x_n} \approx \frac{4\Phi_2 - \Phi_3 - 3\Phi_1}{2\Delta x}. \quad (11)$$

Аппроксимация первой производной функции $\Phi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)$ при $x_1 < x_i < x_n$ (для внутренних точек)

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (12)$$

На рисунках 3,4,5 представлены преобразования (изгиб) области «V», соответствующее нагрузке c (ГПа). Точкой F показано максимальное перемещение.

В качестве примера рассмотрим материал: алюминий A995 ($E=70$ ГПа).
Необходимые расчеты были выполнены в среде MATLAB[3].

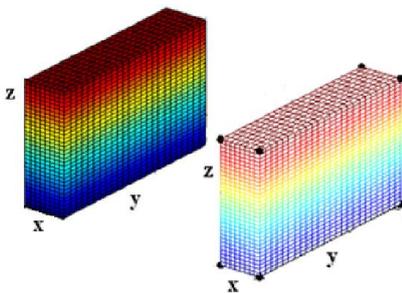


Рис. 3. при $C=0$. Слева начальное состояние

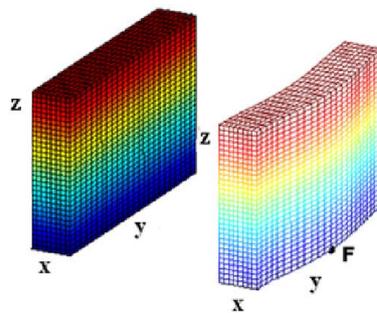


Рис. 4. при $C=0.3$ ГПа. Слева начальное состояние

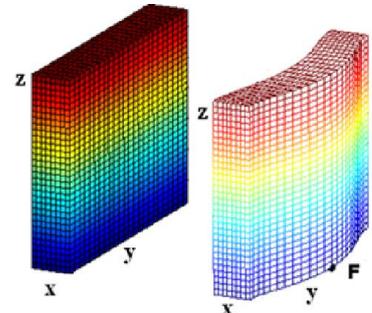


Рис. 5. при $C=0.6$ ГПа. Слева начальное состояние

Результаты расчета массивного тела прямоугольной формы из алюминия [A995](#) ($E=70$ ГПа) для максимально деформированной точки F. Таблица №1.

ε_x	0	-2.7506e-002	-4.0700e-002	-5.3540e-002	1.0692e-001	-7.8216e-002	-9.0078e-002
u_x	0	-1.6971e-001	-2.5456e-001	-3.3941e-001	5.7956e-001	-5.0912e-001	-5.9397e-001
ε_y	0	-1.4367e-001	-2.0106e-001	-2.5124e-001	1.3417e+000	-3.3481e-001	-3.6996e-001
u_y	0	-1.6971e-001	-2.5456e-001	-3.3941e-001	1.5529e-001	-5.0912e-001	-5.9397e-001
ε_z	0	3.2411e-001	4.8617e-001	6.4823e-001	-1.1069e+000	9.7234e-001	1.1344e+000
u_z	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

График деформированного состояния массивного тела прямоугольной формы из алюминия [A995](#) ($E=70$ ГПа) для максимально деформированной точки F (см. рис. 6, рис.7).

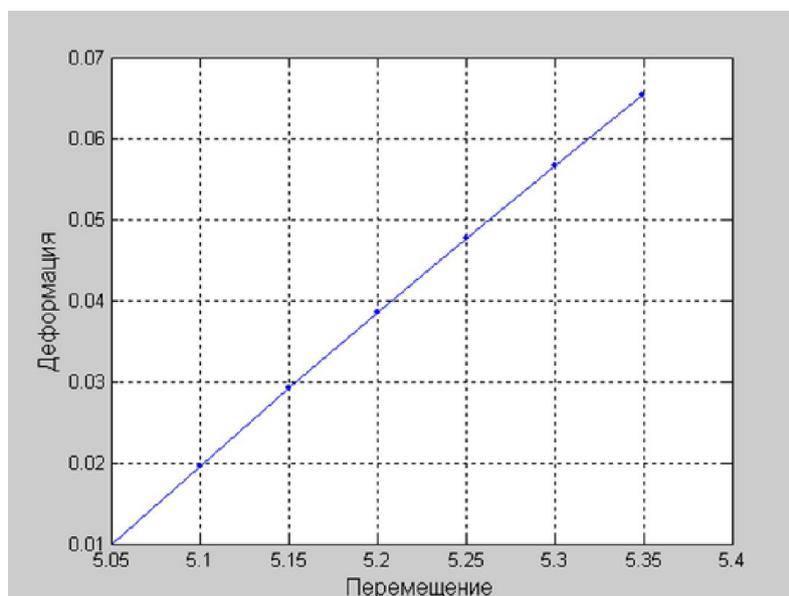


Рис. 6. График зависимости ε_x от u_x

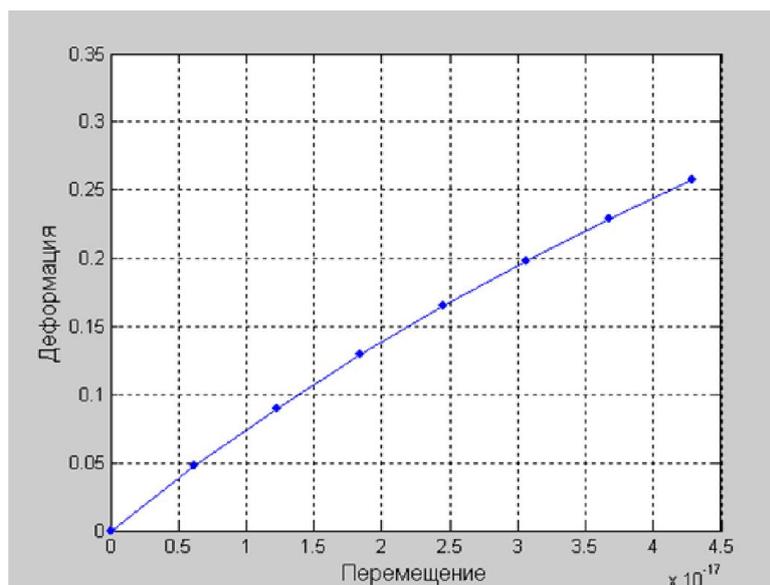


Рис. 7. График зависимости ε_y от u_y

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния конструкции из алюминия [A995](#) ($E=70$ ГПа) для максимально деформированной точки F. Таблица №2.

$\varepsilon_x, \%$	0	-3.8462e-002	-5.6604e-002	-7.4074e-002	-9.0909e-002	-1.0714e-001	-1.2281e-001
$\varepsilon_y, \%$	0	-1.9177e-001	-2.6248e-001	-3.2182e-001	-3.7232e-001	-4.1582e-001	-4.5368e-001
$\varepsilon_z, \%$	0	1.0008e+001	1.0237e+001	1.0466e+001	1.0695e+001	1.0924e+001	1.1154e+001
σ_x	0	4.8986e-002	7.3479e-002	9.7972e-002	1.2246e-001	1.4696e-001	1.7145e-001
σ_y	0	0	0	0	0	0	0
σ_z	0	0	0	0	0	0	0
C, ГПа	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

График напряженно-деформированного состояния конструкции из алюминия [A995](#) ($E=70$ ГПа) для максимально деформированной точки F (см. рис. 8).

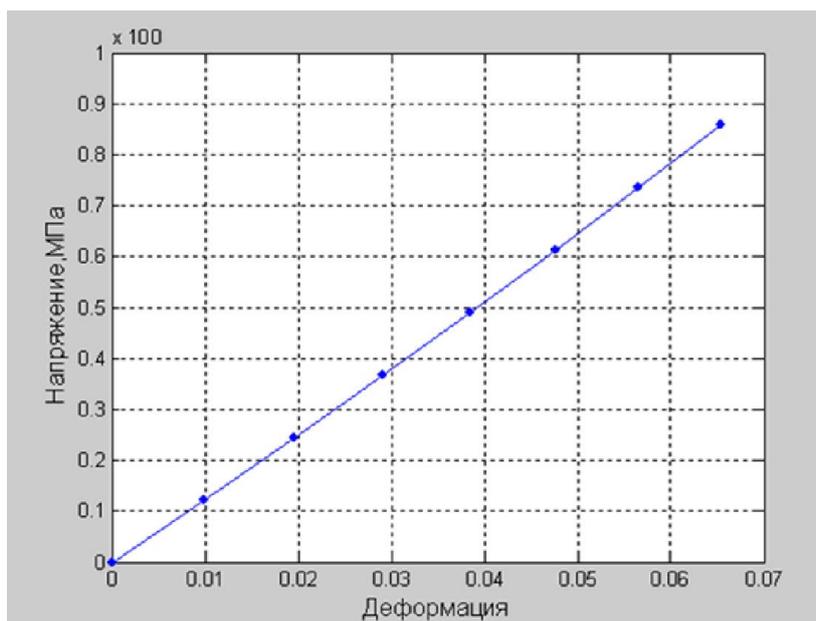


Рис. 8. График зависимости напряжения σ_x от деформации ϵ_x

Выводы:

1. Вычислительные эксперименты, связанные с моделированием изменения формы образца (изгиб) при нагрузках могут использоваться для изучения поведения изделий при больших деформациях.
2. Показано, что тензор деформации Коши, считающимся пригодным только для малых деформаций, на самом деле является полноценной характеристикой деформированного состояния при любых величинах деформаций.

Литература:

1. Дуйшеналиев Т.Б. О постановке и решении статической краевой задачи// Бишкек 2001. С. 40-50.
2. А.Б. Жакыпбек, Т.Б. Дуйшеналиев. Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела. Б., 1999.
3. Дьяконов В.П. MATLAB 6. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. С. 158-165.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Мекенбаев Б.Т.