*Агыбаев А.С.*

# ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ $B$ - КОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*Агыбаев А.С.*

# $B$ - КОМПАКТУУ ЧАГЫЛДЫРУУЛАРДЫН ТЕСКЕРИ СПЕКТРЛЕРИ

*S.A. Agybaev*

# INVERSE SPECTRA $B$ - COMPACT MAPPINGS

*УДК: 515.12*

*В предлагаемой научной статье исследуются некоторые свойства $B$ - компактных отображений и их обратные спектры.*

*Бул сунушталган илимий макалада $B$ - компактуу чагылдыруулардын айрым касиеттери жана алардын тескери спектрлери изилденет.*

*The proposed research investigated some properties $B$ - compact mappings and inverse spectra.*

В работе [1] было введено и изучено класс $B$ - компактных равномерных пространств.

Пусть $(X,U)$ и $(Y,V)$ - равномерные пространства.

Пусть $B$ - свойство равномерных покрытий равномерных пространств, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Пусть $f: X \to Y$ - равномерно непрерывное отображение «в». Если покрытие $\beta \in V$ обладает свойством $B$, то покрытие $f^{-1}\beta \in U$ также обладает свойством $B$.

2) если покрытия $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in U$ обладают свойством $B$, то покрытие $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \in U$ также обладает свойством $B$.

Свойством $B$ могут быть

1. $B$ - быть конечным равномерным покрытием.
2. $B$ - быть точечно конечным равномерным покрытием.
3. $B$ - быть звездно конечным равномерным покрытием.
4. $B$ - быть $\tau$ -звездным равномерным покрытием, где $\tau \geq \aleph_0$.
5. $B$ - быть сильно $\tau$ -звездным равномерным покрытием.

При этом, равномерное покрытие $\alpha$ равномерного пространства $(X,U)$ называется $\tau$ - звездным (сильно $\tau$ -звездным) равномерным покрытием, если $|St(\alpha, x)| \leq \tau$ для любого $x \in X$ ($|St(\alpha, A)| \leq \tau$ для любого $A \in \alpha$), где $St(\alpha, x) = \{A \in \alpha : A \ni x\}$ ($St(\alpha, A) = \{A' \in \alpha : A \cap A' \neq \varnothing\}$).

**Определение 1.** Равномерно непрерывное отображение $f: (X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства $(X,U)$ в равномерное пространство $(Y,V)$ называется $B$ - компактным, если отображение $f$ имеет базу $U_f$, состоящую из покрытий со свойством $B$.

Всякое равномерно непрерывное отображение $B$ - компактного равномерного пространства в произвольное равномерное пространство является $B$ - компактным отображением.

**Предложение 1**. Пусть $f: (X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение. Если $(X,U)$ - $B$ -компактное пространство, то отображение $f$ является $B$ -компактным отображением.

**Доказательство**. Пусть $f: (X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение $B$ - компактного равномерного пространства $(X,U)$ на равномерное пространство $(Y,V)$ и $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует такое равномерное покрытие $\lambda \in U$ со свойством $B$, что $\lambda \succ \alpha$. Пусть $\beta \in V$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда $f^{-1}\beta \in U$. Легко показать, что $f^{-1}\beta \wedge \lambda \succ \alpha$. Итак, отображение $f$ - является $B$ -компактным.

Если $f: (X,U) \to (Y,V)$ - $B$ -компактное отображение и $Y = \{y\}$, то равномерное пространство $(X,U)$ $B$ -компактно. В самом деле, пусть $\alpha \in U$ - любое равномерное покрытие. Пусть $\beta \in V$ и $\gamma \in U$ такие покрытия, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$, где $\gamma$ - покрытие со свойством $B$. Очевидно, $f^{-1}\beta = \{X\}$. Тогда $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$. Следовательно, $(X,U)$ - $B$ -компактно.

Легко видеть, что если $\alpha$ и $\beta$ - покрытия со свойством $B$, то $\alpha \wedge \beta$ также обладает свойством $B$.

Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение. Также легко видеть, что если $\beta$ покрытие обладает свойством $B$ пространства $(Y,V)$, то $f^{-1}\beta$ также обладает свойством $B$.

**Предложение 2.** Композиция двух $B$-компактных отображений снова является $B$-компактным отображением.

**Доказательство.** Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ и $g:(Y,V)\to(Z,W)$ $B$-компактные отображения. Пусть $\alpha\in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существуют такие равномерное покрытие $\beta\in V$ и равномерное покрытие $\gamma\in U$ со свойством $B$ что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. В силу $B$-компактности отображения, для равномерного покрытия $\beta\in V$ существуют такие равномерное покрытие $\lambda\in W$ и равномерное покрытие $\eta\in V$ со свойством $B$, что $g^{-1}\lambda\wedge\eta\succ\beta$. Тогда $(g\circ f)^{-1}\lambda\wedge(f^{-1}\eta\wedge\gamma)\succ f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Положим $f^{-1}\eta\wedge\gamma=\mu$. Легко видеть, что покрытие $\mu$ обладает свойством $B$. Итак, $g\circ f:(X,U)\to(Z,W)$ - $B$-компактное отображение.

**Предложение 3.** Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства $(X,U)$ на равномерное пространство $(Y,V)$ и $(M,U_M)$ - подпространство пространства $(X,U)$. Если $f$ - $B$-компактное отображение, то его сужение $f|_M:(M,U_M)\to(Y,V)$ также является $B$ - компактным отображением.

**Доказательство.** Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и $(M,U_M)$ - любое подпространство. Пусть $\alpha_M\in U_M$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует равномерное покрытие $\alpha\in U$ такое, что $\alpha_M=\alpha\wedge\{M\}$. Пусть $\beta\in V$ и $\gamma\in U$ такие равномерные покрытия, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$, где $\gamma$ - равномерное покрытие со свойством $B$. Тогда $f^{-1}\beta\wedge\gamma_M\succ\alpha_M$.

Следовательно, $f|_M^{-1}\beta\wedge\gamma_M\succ\alpha_M$ Значит, отображение $f|_M:(M,U_M)\to(Y,V)$ - $B$-компактно.

**Теорема 1.** Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ - $B$-компактное отображение и $(Y,V)$ - $B$ - компактное пространство, то $(X,U)$ является $B$ - компактным.

**Доказательство.** Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ и $(Y,V)$ - $B$-компактны. Пусть $\alpha\in U$ - произвольное покрытие. Тогда найдутся такие $\beta\in V$ и равномерное покрытие $\gamma\in U$ со свойством $B$, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. В покрытие $\beta\in V$ впишем равномерное покрытие $\eta\in V$ со свойством $B$. Тогда $f^{-1}\eta\wedge\gamma\succ\alpha$ и покрытие $f^{-1}\eta\wedge\gamma$ обладает свойством $B$. Итак, $(X,U)$ - $B$-компактно.

На языке объекта $f$ категории $Unif(Y,V)$ имеет места следующая теорема.

**Теорема 2.** Для объекта $f$ категории $Unif(Y,V)$ следующие условия эквивалентны:

1) Объект $f$ является $B$-компактным и $\tau$-полным;

2) Объект $f$ является пределом некоторого $\tau$-спектра $P$:

$f=\varprojlim\{f_a,h_a^b,L\}$, где $f_a$ - $B$ - компактны, $w(f_a)\le\tau$ для любого $a\in L$

**Доказательство.** $1)\Rightarrow 2)$. Пусть $f:(X,U,U_f)\to(Y,V)$ является $B$-компактным и $\tau$-полным. Пусть $\{L_a:a\in L\}$ - система всех псевдоравномерностей на $X$, что $L_a\subset U_f$ и $w(f_a)\le\tau$, $a\in L$. Введем следующее отношение эквивалентности "~"на $X$:

$(x_1\sim x_2)\Leftrightarrow(fx_1=fx_2)$

и $\cap\{\alpha(x_1):\alpha\in L_a\}=\{\alpha(x_2):\alpha\in L_a\}$. Пусть $X_a$ - фактор - множество множества $X$ по отношению эквивалентности "~", $h_a:X\to X_a$ - естественное отображение. Так как для любого $x\in X$ существует такой $y\in Y$, что $h_a^{-1}(h_a x)\subset f_y^{-1}$, то $f_a:X_a\to Y$ которое задано по формуле $f_a=f\circ h_a^{-1}$ является корректно определенным. Ясно, что $f_a=f_a\circ h_a$. Полагаем, что $U_a\ne U_b$ в том и только томслучае, если $L_a\subset L_b$. Докажем, что $L$ является $\tau$-полным. Пусть $L_0\subset L$ и $|L_0|\le\tau$. Пусть $L_\alpha=\sup\{L_a:a\in L_0\}$. Заметим, что $w(L_\alpha)\le\tau$. Следовательно, $\alpha=\sup L_0$.

Пусть $f_a^{-1}V$ - семейство всех покрытий множества $X$, обладающих свойством $B$, в каждое из которых можно вписать покрытие вида

$f_a^{-1}\beta, \beta \in V$. Следовательно, семейство $f_a^{-1}V$ является псевдоравномерностью на $X_a$. Пусть $U_{f_a}$ - семейство всех таких покрытий $\alpha_a$ множества $X_a$, в каждое из которых можно вписать покрытие вида $h_a^{\#}\gamma$, где $\gamma \in L_a$ и $h_a^{\#}\gamma = \{X_a \setminus h_a(X \setminus \Gamma) : \Gamma \in \gamma Y\}$, т.е. в каждое из которых можно вписать покрытие со свойством $B$. Легко видеть, что $U_{f_a}$ является псевдоравномерностью на $X_a$ и $w(f_a) \le \tau$.

Пусть $U_a = \sup\{U_{f_a}, f_a^{-1}V\}$. Ясно, что $U_a$ является равномерностью на $X_a$. Также ясно, что $U_{f_a}$ является базой отображения $f_a$. Следовательно, отображение $f_a : (X_a, U_a, U_{f_a}) \to (Y, V)$ является объектом категории $Unif(Y,V), w(f_a) \le \tau, a \in L$. Если $b \succ a$ то $h_a^b : X_b \to X_a, h_a^b = h_a \circ h_b^{-1}$. Из $L_a \subset L_b$ следует, что $h_a^b$ - корректно определенное отображение.

Докажем, что отображение $h_a^b$ равномерное пространства $(X_b, U_{f_b})$ в равномерное пространство $(X_a, U_{f_a})$ является равномерно непрерывным. Из $h_a = h_a^b \circ h_b$ и $f = f_a \circ h_a = f_b \circ h_b$ вытекает, что $f_b = f_a \circ f_a^b$. Пусть $a \in U_{f_a}$. Тогда $h_a^{-1}\alpha \in L_a$. Так как $L_a \subset L_b$, то $h_a^{-1}\alpha \in L_b$. Поэтому $h_b^{\#}(h_a^{-1}\alpha) \in U_{f_a}$. Легко видеть, что покрытие $h_b^{\#}(h_a^{-1}\alpha)$ вписать в покрытие $(h_a^b)^{-1}\alpha$ и $(h_a^b)^{-1} \in U_{f_a}$. Заметим, что отображение $h_a^b : (X_b, U_b) \to (X_a, U_a)$ является равномерно непрерывным. Итак, $h_a^b : f_b \to f_a$ - морфизм. Таким образом получен обратный спектр $P = \{f_a, h_a^b, L\}$ категории $Unif(Y,V)$.

Далее через $X^*$ обозначим множество всех таких точек произведения $\prod_{a \in L} X_a$, что

*a)* $f_a x_a = f_b x_b$, $a, b \in L$, *b)* $x_a = h_a^b x_b, b \succ a$. Пусть $x \in X$. Тогда $\{h_a x\}_{a \in L} \in \prod_{a \in L} X_a$, $fx = f_a(h_a x)$ для любого $a \in L$ и $h_a^b(h_b x) = h_a x, b \succ a$. Следовательно, $\{h_a x\} \in X^*, x \in X$. Отсюда следует, что $X^* \neq \emptyset$. Пусть $U^*$ - равномерность на $X^*$, порожденная равномерностью $\prod_{a \in L} U_a$, $U_f^*$-псевдоравномерность на $X^*$, порожденная псевдоравномерностью $\prod_{a \in L} U_{f_a}$. Пусть $f^* \to X^* \to Y^*$ отображение которое определено по формуле $f^*\{x_a\}_{a \in L} = f_a x_a$. Корректность определения отображения $f^*$ следует из того, что $f_a x_a = f_b x_b, a, b \in L$. В двух словах доказывается, что отображение $f^* : (X^*, U^*) \to (Y, V)$ равномерно непрерывно, а $U_f^*$- база отображения $f^*$.

Легко видеть, что отображения $h : (X, U_f) \to (X^*, U_f^*)$ и $h : (X, U) \to (X^*, U^*)$ являются равномерным вложением. Теперь покажем, что $h$ является отображением "на". Пусть $x^* = \{x_a\}_{a \in L} \in X^*$. Тогда $x_a \in X_a$ для любого $a \in L$. Семейство $w = \{h_a^{-1}(x_a : a \in L\}$ является $\tau$ - центрированным.

Пусть $\alpha = \sup L_0$.

Тогда $h_\alpha^{-1}(x_\alpha) \subset h_\alpha^{-1}(x_a), a \in L_0$ и $h_\alpha^{-1}(x_\alpha) \subset \cap\{h_a^{-1}(x_a) : a \in M\}$.

Через $\Phi$ обозначим фильтр в $X$, порожденный $\tau$ - центрированным семейством *w*. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное покрытие. Тогда найдутся такие $\beta \in V$ и $\gamma \in U_f$ что $f_\beta^{-1} \wedge \gamma \succ \alpha$. Существуют такие $\alpha \in L$ и $\gamma_\alpha \in L_\alpha$ что $\gamma_\alpha \succ \gamma$. Тогда $h_\alpha^{-1}(x_\alpha) \subset \gamma_\alpha(x) \subset \Gamma, x \in h_\alpha(x_\alpha), \Gamma \in \gamma$. Существуют $y \in Y$ и $B \in \beta$ такие, что $h_\alpha^{-1}(x_\alpha) \subset f_y^{-1} \subset f^{-1}B$ $.f\Phi$ сходится к точке $y^*$, так как $f^{-1}B \cap \Gamma \subset \mathrm{A}$. В силу $\tau$-полноты отображения $f$ фильтр $\Phi$ сходится к некоторой точке $x^* \in \cap\{h_\alpha(x_\alpha) : a \in L\}$. Значит, $hx = x^*$ т.е. *h*является отображением "на".

Следовательно, объект $f$ изоморфен $f^*$ в категории $Unif(Y,V)$. Т.к. при $b \succ a$ отображение $h_a^b : X_b \to X_a$ является отображением "на", то морфизм $h_a^b : f_a \to f_a$ является эпиморфизмом. Далее докажем, что спектр $P = \{f_a, h_a^b, L\}$ является $\tau$- спектром. Пусть $d \in \mathrm{M}$- произвольный предельный элемент множества $L$, $P\setminus_d$ - ограничение спектра $P$ на $L\setminus_d$. Для каждого $a \prec d$ задан эпиморфизм $h_a^{\alpha}: f_\alpha \to f_a$. Т.к. $w(f_\alpha) \le \tau$, то объект $f_\alpha$ является $\tau$ - полным. Легко видеть, что $f_d = \varprojlim \mathrm{P}\setminus_d$.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть $f$ - является пределом $\tau$ - спектра $P = \{f_a, h_a^b, L\}$. Пусть $F$ - такой $\tau$ - центрированный фильтр в $(X,U)$, что $fF$ сходится в $(Y,V)$. Положим $F_a = h_a(F)$. Тогда $F_a$ - $\tau$ - центрированный фильтр в $(X_a,U_a)$, $f_aF_a = fF, a \in L$. Так как, вес отображения $f_a$ имеет мощность $\le \tau$ то, $f_a$ является $\tau$ - полным. Отсюда вытекает, что фильтр $F_a$ сходится к точке $x_a \in X_a$ в $(X_a,U_a)$. Легко видеть, что фильтр $F$ сходится к точке $x = \{x_a\}_{a\in L}$ в $(X,U)$. Из условий свойства $B$ следует, что $f$ является $B$ - компактным.

**Литература:**

1. Борубаев А.А., Канетов Б.Э. $B$ - компактные равномерные пространства // Изв. НАН КР. - 2012. - №3.- С.102-105.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013.-160 с.

**Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Чекеев А.А.**