ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Ж.Н. Кутунаев, Г.М. Адиева, У.А. Сактанов

НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ВИДА УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

J. N. Kutenai, G. M. Adiyeva, W. A. Saltanov

FINDING A COMMON SOLUTION OF ONE TYPE HYPERBOLIC EQUATION WITH COECIENTS DEPENDING ON TWO VARIABLES

УДК: 517.946.9

Колебательные процессы возникают во многих областях физики, техники, технологии, в природных явлениях – землетрясений, цунами, т.е. в волновых процессах и т.д. задачах. Изучением этих процессов занимались и занимаются многие ученые за рубежом и в Кыргызстане.

Развивается метод обобщенных функций для решения краевых задач для одного класса стационарных бегущих решений волнового уравнения в N-мерных цилиндрических областях. Рассматривается уравнение гиперболического типа, частными случаями которого являются многие другие уравнения, встречающиеся в прикладных технических и инженерных науках.

***Ключевые слова:** землетрясение, цунами, техническая наука, технология.*

Техниканын көптөгөн тармактарында жаратылыш кубулуштарында мисалы жер титирөөдө цунами болобу термелүү процесстеринин маселелеринин сөзсүз түрдө эске алуу зарылчылыгы келип чыгат. Бул процесстерди изилдөө менен, Кыргызстанда эле эмес чет мамлекеттерде да көптөгөн окумуштуулар эмгектенишет.

N-өлчөмдүү цилиндрдик областа четки маселелердин чечимдерин табууда жалпыланган функциялар усулу каралат. Колдонмо жана техникалык илимдерде гиперболикалык түрүндөгү тендемелердин жекече учурдагы тендемелери каралат.

***Негизги сөздөр:** жер титирөө, цунами, техникалык илим, технология,*

Oscillatory processes arise in many fields of physics, theorists , technology, natural phenomena - earthquakes, tsunamis, ie in the waves, etc. tasks. Many scientists abroad in Kyrgyzstan are reserching the study of these processes.

Developed method of generalized functions for solving boundary value problems for a class of stationary solutions of traveling wave equation in N-dimensional cylindrical domains. The equation of hyperbolic type, which are special cases of many other equations encountered in the application of technical and engineering sciences.

***Key words:** earthquake, tsunami, technical science, technology.*

Рассматривается уравнение гиперболического типа, частными случаями которого являются многие другие уравнения, встречающиеся в прикладных технических и инженерных науках.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении волн на полу ограниченной прямой $x \geq 0.$ Как известно, процесс колебаний полуограниченной прямой зависит от граничного условия, от ее начальной формы $u(x,0)$ и распределения скорости $u_t(x,0)$ в начальный момент времени.

Если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных $u(x,0)$ и $u_t(x,0)$ с течением времени ослабевает, т.е. на практике, в некоторых случаях, заботиться о соблюдении начальных данных нет необходимости. В результате возникают важные классы задач о распространении граничного режима, которые называются задачами без начальных условий.

В настоящей работе рассмотрим задачу о распространении граничного режима без учета начального условия $u(x,0)$. Если в начальный момент времени полуограниченная прямая занимает произвольное положение, а начальный импульс равен нулю, то ясно, что колебание осуществляется только за счет граничного режима.

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения колебании

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{(\varphi'(x))^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[\frac{2}{\varphi'(x)}\left(\beta_1 - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)\varphi'(x)}\right) - \frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}\right]\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+\left[\left(\beta_2 - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)\varphi'(x)}\right)^2 - \frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)\varphi'(x)}\right)\right]u, \qquad 0 < x < \infty, t > 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$a_1u_{tt}(0,t)+a_2u_t(0,t)+a_3u_x(0,t)+a_4u(0,t)+\lambda\int_0^t e^{\alpha(t-s)}u(0,s)ds=\mu(t),\quad t>0 \qquad (2)$$

и начальному условию

$$u_t(x,0)=0,\quad 0<x<\infty, \qquad (3)$$

где $a_i\ (i=\overline{1,4}),\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_1\neq\beta_2-$ постоянные числа, $\varphi,\psi-$произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'(x)\neq 0,\ \psi'(x)\neq 0,\ \mu(t)-$заданная непрерывная функция при $t>0$.

Решение задачи: В данной работе общее уравнение (1) предлагается искать в виде

$$u(x,t)=\psi(x)\left[e^{\beta t}f(\varphi(x)+t)+e^{-\beta t}f(g(x)-t)\right],$$

где $f,g-$произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Это функция удовлетворяет начальному условию (3), если ее выберем в виде

$$u(x,t)=\psi(x)\left[e^{\beta t}f(\varphi(x)+t)+e^{-\beta t}f(\varphi(x)-t)\right].$$

Дифференцируя функцию $u(x,t)$ в последнем выражении, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\beta t}(\psi'(x)f(\varphi(x)+t)+\psi(x)\varphi'(x)f'(\varphi(x)+t))+$$
$$+e^{-\beta t}(\psi'(x)g(\varphi(x)-t)+\psi(x)\varphi'(x)f'(\varphi(x)-t)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)\left[e^{\beta t}(\beta f(\varphi(x)+t)+f'(\varphi(x)+t))-e^{-\beta t}(\beta f(\varphi(x)-t)+f'(\varphi(x)-t))\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\psi(x)\left[e^{\beta t}(\beta^2 f(\varphi(x)+t)+2\beta f'(\varphi(x)+t)+f''(\varphi(x)+t))+\right.$$
$$\left.+e^{-\beta t}(\beta^2 f(\varphi(x)-t)+2\beta f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t))\right].$$

Поставляя значения $u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ в граничное условие (2), получим неоднородное функционально-дифференциальное уравнение 2-го порядка с интегральным членом относительно функции f:

$$e^{\beta t}[a_1\psi(0)f''(\varphi(0)+t)+p_1\psi(0)f'(\varphi(0)+t)+p_2\psi(0)f(\varphi(0)+t)]+$$
$$+e^{-\beta t}[a_1\psi(0)f''(\varphi(0)-t)+q_1\psi(0)f'(\varphi(0)-t)+q_2\psi(0)f(\varphi(0)-t)]+$$
$$+\psi(0)\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\left[e^{\beta s}f(\varphi(0)+s)+e^{-\beta s}f(\varphi(0)-s\right]ds=0 \qquad (4)$$

где $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2$ определены согласно равенству

$$\left.\begin{matrix}p_1=\psi(0)(2a_1\beta+a_2+a_3\varphi'(0)),\ \ p_2=\psi(0)(a_1\beta^2+a_2\beta+a_4))+a_3\varphi'(0),\\ q_1=\psi(0)(2a_1\beta-a_2+a_3\varphi'(0)),\ \ q_2=\psi(0)(a_1\beta^2-a_2\beta+a_4))+a_3\varphi'(0)\end{matrix}\right\}.$$

Сначала решим однородное уравнение

$$e^{\beta t}[a_1\psi(0)f''(\varphi(0)+t)+p_1\psi(0)f'(\varphi(0)+t)+p_2\psi(0)f(\varphi(0)+t)]+$$
$$+e^{-\beta t}[a_1\psi(0)f''(\varphi(0)-t)+q_1\psi(0)f'(\varphi(0)-t)+q_2\psi(0)f(\varphi(0)-t)]+$$
$$+\psi(0)\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\left[e^{\beta s}f(\varphi(0)+s)+e^{-\beta s}f(\varphi(0)-s\right]ds=0 \qquad (5)$$

С решение уравнения (5) будем искать в виде

$$f(t)=e^{mt}+ke^{nt}, \qquad (6)$$

где $m,\ n,\ k$ – постоянные числа, подлежащие определению. Поставляя функцию (6) и ее соответствующие производные в (5), будем иметь

$$
\begin{gathered}
e^{\beta t}\left[a_1\psi(0)\left(m^2 e^{m\varphi(0)} e^{mt} + kn^2 e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right) +\right. \\
\left. + p_1\left(m e^{m\varphi(0)} e^{mt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right) + p_2\left(m e^{m\varphi(0)} e^{mt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right)\right] + \\
+ e^{-\beta t}\left[a_1\psi(0)\left(m^2 e^{m\varphi(0)} e^{-mt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right) +\right. \\
\left. + q_1\left(m e^{m\varphi(0)} e^{-mt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{-nt}\right) + q_2\left(m e^{m\varphi(0)} e^{-mt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{-nt}\right)\right] + \lambda\psi(0) \times \\
\times \int_0^t e^{\alpha(t-s)}\left[e^{\beta s}\left(e^{m\varphi(0)} e^{-ms} + kn e^{n\varphi(0)} e^{-ns}\right) + e^{-\beta s}\left(e^{m\varphi(0)} e^{-ms} + kn e^{n\varphi(0)} e^{-ns}\right)\right] ds = 0 \qquad (7)
\end{gathered}
$$

Вычисляя интеграл, окончательно получим

$$
\begin{gathered}
\lambda\psi(0)\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\left[e^{\beta s}\left(e^{m\varphi(0)} e^{-ms} + kn e^{n\varphi(0)} e^{-ns}\right) + e^{-\beta s}\left(e^{m\varphi(0)} e^{-ms} + kn e^{n\varphi(0)} e^{-ns}\right)\right] ds = \\
= \lambda\psi(0)\left[e^{\beta t}\left(\frac{e^{m\varphi(0)}}{\beta + m - \alpha} e^{mt} + \frac{e^{n\varphi(0)}}{\beta + n - \alpha} e^{nt}\right) - e^{-\beta t}\left(\frac{e^{m\varphi(0)}}{\beta + m + \alpha} e^{-mt} + \frac{e^{n\varphi(0)}}{\beta + n + \alpha} e^{nt}\right) -\right. \\
\left. - e^{\alpha t}\left(\frac{e^{m\varphi(0)}}{\beta + m - \alpha} + k\frac{e^{n\varphi(0)}}{\beta + n - \alpha} - \frac{e^{m\varphi(0)}}{\beta + m + \alpha} - k\frac{e^{n\varphi(0)}}{\beta + n + \alpha}\right)\right].
\end{gathered}
$$

Выберем теперь число α так, чтобы коэффициент при $e^{\alpha t}$ был равен нулю. Для этого достаточно положить $\alpha = 0.$ Тогда, разделив равенства (7) на $e^{\beta t}$ и положив $m + n = -2\beta$, получим

$$
\begin{gathered}
a_1\psi(0)\left(m^2 e^{m\varphi(0)} e^{mt} + kn^2 e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right) + \\
+ p_1\left(m e^{m\varphi(0)} e^{mt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right) + p_2\left(e^{m\varphi(0)} e^{mt} + k e^{n\varphi(0)} e^{nt}\right) + \\
+ a_1\psi(0)\left(m^2 e^{m\varphi(0)} e^{nt} + kn^2 e^{n\varphi(0)} e^{mt}\right) + \\
+ q_1\left(m e^{m\varphi(0)} e^{nt} + kn e^{n\varphi(0)} e^{mt}\right) + q_2\left(e^{m\varphi(0)} e^{nt} + k e^{n\varphi(0)} e^{mt}\right) + \\
+ \lambda\psi(0)\left(\frac{e^{m\varphi(0)}}{m+\beta} e^{mt} + k\frac{e^{n\varphi(0)}}{n+\beta} e^{nt} - \frac{e^{m\varphi(0)}}{m+\beta} e^{nt} - k\frac{e^{n\varphi(0)}}{n+\beta} e^{mt}\right) = 0.
\end{gathered}
$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при e^{mt} и e^{nt} к нулю, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными для определения m, n, k:

$$
\left.
\begin{gathered}
m + n = -2\beta, \\
e^{m\varphi(0)}\left(a_1\psi(0)m^2 + p_1 m + p_2 + \frac{\lambda\psi(0)}{m + \beta}\right) + k e^{n\varphi(0)}\left(a_1\psi(0)n^2 + q_1 n + q_2 - \frac{\lambda\psi(0)}{n + \beta}\right) = 0, \\
k e^{n\varphi(0)}\left(a_1\psi(0)n^2 + p_1 n + p_2 + \frac{\lambda\psi(0)}{n + \beta}\right) + e^{m\varphi(0)}\left(a_1\psi(0)m^2 + q_1 m + q_2 + \frac{\lambda\psi(0)}{m + \beta}\right) = 0.
\end{gathered}
\right\}
$$

Так как по условию $m + n = -2\beta$, то $n + \beta = -(m + \beta)$. Поэтому полученную систему можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &m+n=-2\beta,\\ &e^{m\varphi(0)}(a_1\psi(0)m^2+p_1m+p_2)+ke^{n\varphi(0)}(a_1\psi(0)n^2+q_1n+q_2)=\frac{-\lambda\psi(0)}{m+\beta}\left(e^{m\varphi(0)}+ke^{n\varphi(0)}\right),\\ &ke^{n\varphi(0)}(a_1\psi(0)n^2+p_1n+p_2)+e^{m\varphi(0)}(a_1\psi(0)m^2+q_1m+q_2)=\frac{\lambda\psi(0)}{m+\beta}\left(e^{m\varphi(0)}+ke^{n\varphi(0)}\right). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Сумма двух последних уравнений системы (8) дает

$$e^{m\varphi(0)}(2a_1\psi(0)m^2+(p_1+q_1)m+(p_2+q_2))+ke^{n\varphi(0)}(2a_1\psi(0)n^2+(p_1+q_1)n+(p_2+q_2))=0,$$

откуда

$$k=-e^{(m+n)\varphi(0)}\frac{2a_1\psi(0)m^2+(p_1+q_1)m+(p_2+q_2)}{2a_1\psi(0)n^2+(p_1+q_1)n+(p_2+q_2)}. \quad (9)$$

Поставляя найденное значение k во второе уравнение системы (8) и учитывая при этом равенство $n+\beta=-(m+\beta)$, получим

$$a_1\psi(0)m^2+p_1m+p_2-\frac{2a_1\psi(0)m^2+(p_1+q_1)m+(p_2+q_2)}{2a_1\psi(0)n^2+(p_1+q_1)n+(p_2+q_2)}(a_1\psi(0)n^2+q_1n+q_2)=$$

$$=2\lambda\psi(0)\frac{(-4a_1\psi(0)\beta+(p_1+q_1))}{2a_1\psi(0)n^2+(p_1+q_1)n+(p_2+q_2)}.$$

Таким образом, убедились, что для определения m, n, k имеется система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &m+n=-2\beta,\\ &k=-e^{(m+n)\varphi(0)}\cdot\frac{2a_1\psi(0)m^2+(p_1+q_1)m+(p_2+q_2)}{2a_1\psi(0)n^2+(p_1+q_1)n+(p_2+q_2)},\\ &(a_1\psi(0)m^2+p_1m+p_2)(2a_1\psi(0)n^2+(p_1+q_1)n+(p_2+q_2)-\\ &-(2a_1\psi(0)m^2+(p_1+q_1)m+(p_2+q_2))(a_1\psi(0)n^2+q_1n+q_2=\\ &=2a_1\psi(0)(-4a_1\psi(0)\beta+p_1+q_1). \end{aligned}\right\}$$

После некоторых вычислений заметим, что для определения m и n имеет место система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} &m+n=-2\beta,\\ &\sigma(mn)+\mu=0, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\sigma=2\beta a_1\psi(0)(q_1-p_1)+2\beta a_1\psi(0)(q_2-p_2)+p_1^2-q_1^2,\\ &\mu=4\beta^2a_1\psi(0)(p_2-q_2)+2\beta(q_1q_2-p_1p_2)+p_1^2-q_1^2+2\lambda\psi(0)(4a_1\psi(0)\beta-q_1-p_1), \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Таким образом, m, n, k определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} &m_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2+\frac{\mu}{\sigma}},\qquad n_{1,2}=-\beta\mp\sqrt{\beta^2+\frac{\mu}{\sigma}},\\ &k_{1,2}=-e^{(m_{1,2}-n_{1,2})\varphi(0)}\cdot\frac{2a_1\psi(0)m_{1,2}^2+(p_1+q_1)m_{1,2}+(p_2+q_2)}{2a\psi(0)n_{1,2}^2+(p_1+q_1)n_{1,2}+(p_2+q_2)}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Частные решения однородного уравнения (5), соответствующие параметром $(m_1, n_1, k_1), (m_2, n_2, k_2)$, линейно зависимы. Поэтому общее решение уравнения (5) представить в виде

$$\overline{f}(x)=C(e^{m_1t}+ke^{n_1t}), \quad (13)$$

где C– произвольная постоянная, (m_1, n_1, k_1) определяется формулами (12).

Мы убедились, что величина σ определятся формулой

$$\sigma = 4a_2 a_3 \varphi'(0)\big(\psi(0)\big)^2,$$

$$4\beta^2 a_1 \psi(0)(p_2 - q_2) + 2\beta(q_1 q_2 - p_1 p_2) + p_2^2 - q_2^2 = -4a_2 a_3 \varphi'(0)\big(\psi(0)\big)^2 \beta^2$$

и, следовательно, *m* и *n* определяется формулами

$$m_1 = -\beta + \sqrt{\frac{\lambda\psi(0)(4a_1\psi(0)\beta - q_1 - p_1)}{2a_2 a_3 \varphi'(0)\big(\psi(0)\big)^2}}, \quad n_1 = -\beta - \sqrt{\frac{\lambda\psi(0)(4a_1\psi(0)\beta - q_1 - p_1)}{2a_2 a_3 \varphi'(0)\big(\psi(0)\big)^2}} \tag{14}$$

для краткости введем обозначение

$$\omega = \frac{\lambda\psi(0)(4a_1\psi(0)\beta - q_1 - p_1)}{2a_2 a_3 \varphi'(0)\big(\psi(0)\big)^2}. \tag{15}$$

Пусть $\omega > 0$ и $F(x)$ – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (4), тогда общее решение уравнения (4) можно представить в виде

$$f(t) = \overline{f}(t) + F(t), \tag{16}$$

где $\overline{f}(t)$ – общее решение однородного уравнения (5), определенное формулой (13).

Используя функцию (16), согласно (4), построим решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2) и начальному условию (3):

$$u(x,t) = \psi(x)\left[e^{\beta t} f(\varphi(x) + t) + e^{-\beta t} f(\varphi(x) - t)\right] =$$

$$= \psi(x)\left\{C\left[e^{\beta t}\left(e^{m_1(\varphi(x)+t)} + k_1 e^{n_1(\varphi(x)+t)}\right) + e^{-\beta t}\left(e^{m_1(\varphi(x)-t)} + k_1 e^{n_1(\varphi(x)-t)}\right)\right]\right\} +$$

$$+\psi(x)\left[e^{\beta t} F(\varphi(x) + t) + e^{-\beta t} F(\varphi(x) - t)\right]. \tag{17}$$

Пусть теперь $\omega < 0$. В этом случае, согласно (12), для комплексных чисел m_1, n_1, k_1 имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} m_1 = -\beta + i\sqrt{-\omega}, \quad n_1 = -\beta - i\sqrt{-\omega}, \\ k_1 = -e^{2i\sqrt{-\omega}\varphi(0)} \cdot \frac{2a_1\psi(0)m_1^2 + (p_1 + q_1)m_1 + (p_2 + q_2)}{2a_1\psi(0)n_1^2 + (p_1 + q_1)n_1 + (p_2 + q_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Тогда общее решение однородного уравнения (5), соответствующие m_1, n_1, k_1 имеет вид

$$\overline{f}(t) = C\Big[e^{(-\beta + i\sqrt{-\omega})t} -$$

$$-e^{2i\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)} \frac{2a_1\psi(0)\left(-\beta + i\sqrt{-\omega}\right)^2 + (p_1 + q_1)\left(-\beta + i\sqrt{-\omega}\right)(p_2 + q_2)}{2a_1\psi(0)\left(-\beta - i\sqrt{-\omega}\right)^2 + (p_1 + q_1)\left(-\beta - i\sqrt{-\omega}\right)(p_2 + q_2)} e^{(-\beta - i\sqrt{-\omega})t}\Big].$$

Здесь выражение для числа k_1 можно преобразовать следующим образом:

$$k_1 = -e^{2i\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)} \frac{2a_1\psi(0)\left(-\beta + i\sqrt{-\omega}\right)^2 + (p_1 + q_1)\left(-\beta + i\sqrt{-\omega}\right)(p_2 + q_2)}{2a_1\psi(0)\left(-\beta - i\sqrt{-\omega}\right)^2 + (p_1 + q_1)\left(-\beta - i\sqrt{-\omega}\right)(p_2 + q_2)} =$$

$$= -e^{2i\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)} \frac{\alpha + i\delta}{\alpha - i\delta} = - - e^{2i\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)} \left(\frac{\alpha^2\delta^2}{\alpha^2 + \delta^2} + i\frac{2\alpha\delta}{\alpha^2 + \delta^2}\right),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha = 2a_1\psi(0)(\beta^2 + \omega) - \beta(p_1 + q_1) + (p_2 + q_2), \\ \delta = \sqrt{-\omega}(p_1 + q_1 - 4a_1\psi(0)\beta. \end{aligned}\right\}$$

Так как, $\left|\frac{\alpha^2-\delta^2}{\alpha^2+\delta^2}+i\frac{2\alpha\delta}{\alpha^2+\delta^2}\right|=1$, то можно ввести обозначения

$$\cos\theta=\frac{\alpha^2-\delta^2}{\alpha^2+\delta^2},\quad \sin\theta=\frac{2\alpha\delta}{\alpha^2+\delta^2} \tag{19}$$

Тогда, согласно формуле Эйлера,

$$k_1=-e^{2i\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)}(\cos\theta+i\sin\theta)=-e^{2i\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)}\cdot e^{i\theta}=-e^{i(2\sqrt{-\omega}\,\varphi(0)+\theta)}, \tag{20}$$

где θ определяется из (19). Используя (20), функцию $\overline{f}(t)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\overline{f}(t)=C\left(e^{(-\beta+i\sqrt{-\omega})t}-e^{i(2\sqrt{-\omega}\varphi(0))}e^{(-\beta-i\sqrt{-\omega})t}\right)=Ce^{-\beta t}\left(e^{i\sqrt{-\omega}t}-e^{i(2\sqrt{-\omega}\varphi(0)+\theta-\sqrt{-\omega}t)}\right)=$$

$$=Ce^{-\beta t}\left(\cos\sqrt{-\omega}t-\cos(2\sqrt{-\omega}\varphi(0)+\theta-\sqrt{-\omega}t)+\right.$$

$$\left.+i\left(\sin\sqrt{-\omega}t-\sin(2\sqrt{-\omega}\varphi(0)+\theta-\sqrt{-\omega}t)\right)\right),$$

или, окончательно

$$\overline{f}(t)=Ce^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{-\omega}t-\sqrt{-\omega}\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right) \tag{21}$$

где через C обозначено число $C=2\left[i\cos\left(\sqrt{-\omega}\varphi(0)+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\sqrt{-\omega}\varphi(0)+\frac{\theta}{2}\right)\right]$.

Таким образом, при $\omega<0$ общее решение неоднородного уравнения (4) определяется формулой

$$f(t)=Ce^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{-\omega}t-\sqrt{-\omega}\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right)+F(t), \tag{22}$$

где $F(t)$ – какое-нибудь частное решение уравнения (4).

Используя функцию (22), согласно (4), построим решение (1), удовлетворяющее граничному условию (2) и начальному условию (3):

$$u(x,t)=\psi(x)\left\{C\left[e^{\beta t}\left(e^{-\beta(\varphi(x)+t)}\sin\left[\sqrt{-\omega}(\varphi(x)+t)-\sqrt{-\omega}\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right]+F(\varphi(x)+t)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\beta t}\left(e^{-\beta(\varphi(x)-t)}\sin\left[\sqrt{-\omega}(\varphi(x)-t)-\sqrt{-\omega}\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right]+F(\varphi(x)-t)\right)\right]\right\}=$$

$$=\psi(x)\left\{Ce^{-\beta\varphi(x)}\left[\sin\left(\sqrt{-\omega}(\varphi(x)+t)-\sqrt{-\omega}\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\sqrt{-\omega}(\varphi(x)-t)-\sqrt{-\omega}\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+e^{\beta t}F(\varphi(x)+t)+e^{-\beta t}F(\varphi(x)-t)\right\},$$

или, окончательно

$$u(x,t)=\psi(x)\left[C_1\cos\left(\sqrt{-\omega}\varphi(x)-\omega\varphi(0)-\frac{\theta}{2}\right)\sin\sqrt{-\omega}t+e^{\beta t}F(\varphi(x)+t)+e^{-\beta t}F(\varphi(x)-t)\right]. \tag{23}$$

где $C_1=2C$.

Вывод. В данной работе построено в явном виде (24) решение уравнения колебаний (1) с переменными коэффициентами и более общими, чем в [3], граничными условиями. Это решение может быть использовано в дальнейшем, например, для задач оптимального управления процессами колебаний (см. [2]).

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Физмат, 2005.
2. Дженалиев М.Т. Краевые задачи для нагруженных параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 4.С. 661-666.
3. Ж.Ш. Шаршеналиев, Ж.Н. Кутунаев «Аналитическое исследование колебательных процессов модельными задачами ». Бишкек- 2011 г., ИА и ИТ НАН КР.
4. А.М. Самойленко, С.А. Кривошев Дифференциальные уравнения. Киев, Высшая школа 1990 г.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сатыбаев А.Дж.