Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ, ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ОПЕРАТОРДУУ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЧЫГАРУУ

A.Zh. Ashirbaeva, E.A. Mamaziaeva

SOLVING OF NON-LINEAR PARTIAL OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER OF HYPERBOLIC TYPE

УДК: 517.928

Начальная задача для операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа новым способом сведена к решению системы интегральных уравнений.

***Ключевые слова**: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, интегро–дифференциальное уравнение, уравнение гиперболического типа, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.*

Экинчи тартиптеги, гиперболалык типтеги жекече туундулуу оператордуу-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселе жаңы жол менен интегралдык теңдемелер системасына келтирилген

***Негизги сөздөр:** жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, гиперболалык типтеги теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Кошинин маселеси, кысуучу чагылтуулардын принциби.*

The initial value problem for nonlinear partial operator-differential equations of the second order of hyperbolic type is reduced to solving of systems of integral equation.

***Key words:** partial differential equation, non-linear equation, integro-differential equation, equation of hyperbolic type, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.*

В настоящее время идея метода дополнительного аргумента находит свое применение при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков и при изучении периодических решений сингулярно-возмущенных уравнений. На основе метода дополнительного аргумента производятся исследования разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с разными характеристическими направлениями.

С использованием основных идей метода дополнительного аргумента в [1,2] были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза, а также нелинейные волновые уравнения.

В [3,4] на основе метода дополнительного аргумента реализованы численные решения модельной задачи и задачи о движении волн Римана.

В работе[5] предложена общая схема исследования нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка на основе метода дополнительного аргумента.

В данной работе рассмотрим применение метода дополнительного аргумента для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x;u), \tag{1}$$

$$(t,x) \in G_2(T) = \{0 \le t \le T, \quad x \in R\},$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{2}$$

где $F(t,x;u)$ – оператор, содержащий неизвестную функцию в целом и под знаком интеграла.

$C_b^{(k)}$ – класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до *k*-го порядка.

Пусть $u_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R)$, $k = 0,1$, $a(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T))$, $c(t,x,u) \in C_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

В [1] рассмотрено уравнение (1) в случае, когда коэффициенты при частных производных первого порядка не зависят от неизвестной функции.

Введем следующие обозначения:

$$D[a]=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x},\qquad \vartheta_i(t,x)=D[(-1)^i a(t,x)]u, \tag{3}$$

$$g_i(t,x,u)=\frac{1}{a(t,x)}[c(t,x,u)+(-1)^i(a_t(t,x)+(-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)],\quad i=1,2,$$

$$f_i(t,x,u)=(-1)^{i+1}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]g_i(t,x,u),\quad i=1,2,\qquad r_i(t,x,u)=(-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x,u)}{\partial u},\quad i=1,2.$$

Теорема. Пусть оператор $F(t,x;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|F(t,x;u_1)-F(t,x;u_2)\right|\le L\left\|u_1-u_2\right\|_{C(G_2(T))},\quad L=const.$$

Тогда существует такое $T^*>0,$ что задача (1), (2) имеет единственное решение в $\overline{C}^{(2)}(G_2(T^*)).$

Представим основные этапы доказательства теорема в виде лемм.

Лемма 1. Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных

уравнений $u(t,x)=u_0(p_i(0,t,x)+\int\limits_0^t\vartheta_i(s,p_i(s.t.x))ds$ (4)

$$\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)u+(-1)^i\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int\limits_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds+ \tag{5}$$

$$+\int\limits_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\ne j.$$

где $\quad\left[2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u)u(t,x)\right]_{t=0}=\varphi_i(x)\quad i=1,2,$ (6)

$p_i(s,t,x),\quad i=1,2-$ соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p_i(s,t,x)=x+(-1)^i\int\limits_s^t a(\tau,p_i(\tau,t,x))d\tau,\quad 0\le s\le t\le T$$

Доказательство. Пусть $\vartheta_i(t,x),\ i=1,2$ решение системы интегральных уравнений (4),(5). Непосредственным дифференцированием из (4), (5) имеем:

$$D[(-1)^i a(t,x)]u=\vartheta_i(t,x), \tag{7}$$

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+(-1)^i\frac{1}{2}g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+ \tag{8}$$
$$+F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\ne j.$$

Подставляя (7) в (8), получаем уравнению (1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (4), (5) удовлетворяет уравнению (1). Система уравнений (4), (5) удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2) является решением системы интегральных уравнений (4), (5) т.е. решение задачи (1)-(2) сводим к решению системы интегральных уравнений (4)-(5). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x]\left(2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u)\right)u\right)=(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-f_i(t,x,u)u-$$
$$-r_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_j(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\ne j. \tag{9}$$

Действительно из (9) имеем:

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-r_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-f_i(t,x,u)u(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=$$
$$=(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-f_i(t,x,u)u(t,x)-r_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\ne j.$$

Отсюда

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+2F(t,x;u),$$

$$(10)\, i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Для (10) принимая во внимание обозначения (3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+(-1)^i g_1(t,x,u)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^i a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+2F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=2\big(c(t,x,u)+(-1)^i D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x},\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Таким образом, мы показали, что из (9) получается уравнение (1).

Введем обозначение $z(t,x;u)=2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u))u.$

Уравнение (9) с условиями (2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x,;u)=\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^i\int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds+\qquad(11)$$

$$+2\int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

В самом деле, дифференцируя (11), получаем (9). Полагая $t=0$ в (11), получаем (6). Из (11) следует (5).

Из обозначения (3) методом дополнительного получаем (4).

Лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $T^*>0$, что система интегральных уравнений (4), (5) имеет единственное решение.

Запишем систему интегральных уравнений (4)-(5) в виде одного векторного равенства

$$\theta=A\theta,\qquad(12)$$

в котором $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ – вектор-функция переменных (t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_1=u(t,x)$, $\theta_2=\vartheta_1(t,x)$, $\theta_3=\vartheta_3(t,x)$, а компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами:

$$A_1\theta=u_0(p_i(0,t,x)+\int_0^t\theta_i(s,p_i(s.t.x))ds,\quad i=1,2\qquad(13)$$

$$A_i\theta=\frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,\theta_1)\theta_1+(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds+\qquad(14)$$

$$+\int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Покажем, что уравнение (12) имеет в области $G_2(T)$ при $T < T^*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta - \theta_0\| \le M$.

Норму определим равенством

$$\|\theta\| = \max_{0\le i\le 3} \max_{(t,x)\in G_2(T)} \left\{ |\theta_i|, \quad i = 1,2,3 \right\}.$$

Покажем при $T < T^*$ оператор A отображает шар $S(\theta_0, M)$ в себя

$|A_1\theta - u_0| \le KT,$

$\left|A_i\theta - \frac{1}{2}\varphi_i\right| \le \frac{1}{2}(1+T)\alpha_i K + \frac{KT}{2}(\beta_i + \gamma_i K) = \Omega_i(T),$

где $|g_i(t,x,u)| \le \alpha_i = const, \quad |f_i(t,x,u)| \le \beta_i = const \quad |r_i(t,x,u)| \le \gamma_i = const, \quad i = 1,2,$

$\|\theta\| \le \|\theta_0\| + M = K,$

Обозначим через $T_0 = \dfrac{M}{K}$, $T_i -$ положительные корни уравнения $\Omega_i(T) = M, \quad i = 1,2.$

Оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(\theta_0, M)$.

Справедливы следующие оценки

$\left|A_1\theta^1 - A_1\theta^2\right| \le T\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$

$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \le \Theta_i(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|, \quad i = 1,2,$

где

$$\Theta_i(T) = \frac{1}{2}\left(\alpha_i + L_i K\right) + \frac{T}{2}\left(L_i K + \alpha_i + M_i K + \beta_i + K_i K^2 + 2\gamma_i K + 2L\right),$$

$|g_i(t,x,u_1) - g_i(t,x,u_2)| \le L_i|u_1 - u_2|, \quad L_i \ge 0, \quad L_i - const, \quad i = 1,2$

$|f_i(t,x,u_1) - f_i(t,x,u)| \le M_i|u_1 - u_2|, \quad M_i \ge 0, \quad M_i - const, \quad i = 1,2.$

$|r_i(t,x,u_1) - r_i(t,x,u)| \le K_i|u_1 - u_2|, \quad K_i \ge 0, \quad K_i - const, \quad i = 1,2.$

Положительные корни уравнений $\Theta_i(T) = 1, i = 1,2$ обозначим через T_3, T_4.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений система уравнений (4), (5) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени.// Доклады Российской АН. – 1993. –Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
2. Иманалиев М.И., Панков П.С., ИманалиевТ.М. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега- де Фриза. // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17–19.
3. Панков П.С., ИманалиевТ.М.,Кененбаева Г.М. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента. // Юбилейная науч. конф., посвященная 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 16
4. Панков П.С., Будникова О.Д. Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента.// Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.35–38.
5. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Асанов А.