

**ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ**  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE**

*Бийбосунова Г.И., Бийбосун М.И.*

**К ВОПРОСУ ОБТЕКАНИЯ ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

*Бийбосунова Г.И., Бийбосун М.И.*

**КЫСЫЛГАН СУЮКТУК АГЫМЫНЫН КАЙКЫ БЕТ МЕНЕН ӨТҮҮ  
МАСЕЛЕСИНЕ**

*G.I. Biibosunova, M.I. Biibosunov*

**TO THE ISSUE OF FLOWING THE CONCAVE SURFACE BY THE STREAM OF  
COMPRESSIBLE FLUID**

УДК: 532.546

*В статье формулируется краевая задача при обтекании вогнутой поверхности потоком сжимаемой жидкости. Получено частное решение уравнения пограничного слоя.*

**Ключевые слова:** вихри Гертлера-Тейлора, сжимаемый пограничный слой.

*Макалада кысылган суюктук агымынын кайкы бет менен агып өткөн учурдагы четки маселе так айтылат. Чек ара катмарынын теңдемесинин жеке чыгарылышы табылган.*

**Негизги сөздөр:** чек ара катмары.

*We formulate a boundary value problem in the flow around a concave surface flow of a compressible fluid. The particular solution of the boundary layer was obtained.*

**Key words:** the vortices Gertler-Taylor, compressible boundary layer.

Проблема возникновения вихрей Гертлера-Тейлора в сжимаемых потоках привлекает в настоящее время большой интерес в связи с разработкой новых технологий. В статье сформулирована математическая модель, описывающая нелинейную фазу развития возмущений в сжимаемом пограничном слое в поле центробежных сил при больших, но докритических числах Рейнольдса и Гертлера. Эта модель предназначена для описания развития вихрей Гертлера-Тейлора и для возмущенных течений около локальных и периодических в трансверсальном направлении неровностей или других пространственных возмущенных течений.

Рассмотрим режим, соответствующий длинам волны вихрей Гертлера-Тейлора  $\lambda$ , сравнимые с толщиной пограничного слоя  $\delta$ . В этом случае характерные размеры возмущенной области течения совпадают по порядку величины, тогда одинаковые порядки будут иметь и возмущенные величины вертикальной и трансверсальной скоростей  $v \sim w$ , что следует из уравнения неразрывности и принципа минимального вырождения.

Предположим, что вихри вызывают нелинейные изменения основного течения, тогда

$$u \sim \Delta u \sim U \quad (1)$$

Нелинейность, проявляющаяся трансверсальном направлении дает

$$w \sim \Delta w \sim (\Delta p)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

При этом исследуются нелинейные процессы, проявляющиеся в течении с характерным масштабом в направлении координаты  $z$  равным  $\lambda$ , что определяет величину градиента давления в поперечном направлении:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\rho u^2}{\lambda} \quad (1.2)$$

Отсюда  $\Delta p \sim \rho u^2$ . Далее  $v \sim w \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\kappa^2}$  (1.3)

Из уравнения неразрывности и оценок (1.1) - (1.3) можно найти продольный размер возмущенной области

$$x \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Для дальнейшего анализа важно оценить порядок отношения диффузионного и инерционного членов в уравнении продольного импульса:

$$\frac{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} \sim O(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}) \rightarrow 0$$

Понятно, что в таких условиях не выполнено условие прилипания и поэтому необходимо ввести на дне основной области подслоя с толщиной:

$y \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}$  течение в котором будет описываться системой уравнений трехмерного пограничного слоя.

Решение такой системы можно представить в виде:  $x \approx 1 + \lambda \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} x_e$

$$y \approx \lambda y_e$$

$$z \approx \lambda z_e$$

$$u(x, y, z, \varepsilon) \approx u_e(x_e, y_e, z_e) + \dots$$

$$v(x, y, z, \varepsilon) \approx v_e(x_e, y_e, z_e) \cdot \lambda^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$w(x, y, z, \varepsilon) \approx w_e(x_e, y_e, z_e) \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (1.5)$$

$$\rho(x, y, z, \varepsilon) \approx \rho_e(x_e, y_e, z_e) + \dots$$

$$H(x, y, z, \varepsilon) \approx H_e(x_e, y_e, z_e) + \dots$$

$$P(\gamma \mu_e^2)^{-1} + \varepsilon \kappa \rho_e(x_e, y_e, z_e) + \dots$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений Навье-Стокса и совершение предельного перехода при  $Re \rightarrow \infty, Ge \rightarrow \infty$  приводят к модифицированной системе уравнений Эйлера для трехмерного возмущенного течения:

$$\frac{\partial(\rho_e u_e)}{\partial x_e} + \frac{\partial(\rho_e v_e)}{\partial y_e} + \frac{\partial(\rho_e w_e)}{\partial z_e} = 0$$

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + v_e \frac{\partial u_e}{\partial y_e} + w_e \frac{\partial u_e}{\partial z_e} = 0 \quad (1.6)$$

$$\beta [u_e \frac{\partial v_e}{\partial x_e} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial y_e} + w_e \frac{\partial v_e}{\partial z_e}] + u_e^2 + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_x}{\partial y_e} = 0$$

$$[u_e \frac{\partial w_e}{\partial x_e} + v_e \frac{\partial w_e}{\partial y_e} + w_e \frac{\partial w_e}{\partial z_e}] + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_x}{\partial z_e} = 0$$

$$u_{\alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + v_{\alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial y_{\alpha}} + w_{\alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial z_{\alpha}} = 0 \quad \beta = \frac{c^2}{\lambda^2}$$

Отличие системы уравнений (1.6) от обычной системы уравнений Эйлера состоит в наличии члена в уравнении для поперечного импульса, учитывающего влияние центробежных сил.

Другая особенность связана с отсутствием градиента давления в уравнении продольного импульса. Из второго уравнения системы (1.6) следует тогда сохранение продольной составляющей вектора скорости вдоль линии тока. Аналогичным первым интегралом обладает и уравнение для полной энтальпии. Для возмущений малой амплитуды решение системы уравнений (1.6) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(y_{\alpha}) + \tau u_{\alpha}(y_{\alpha}) \sin z_{\alpha} \exp(\alpha x_{\alpha}) + \dots \\ v_{\alpha} &= \tau v_{\alpha}(y_{\alpha}) \exp(\alpha x_{\alpha}) \sin z_{\alpha} + \dots \\ w_{\alpha} &= \tau w_{\alpha}(y_{\alpha}) \exp(\alpha x_{\alpha}) \cos z_{\alpha} + \dots \\ H_{\alpha} &= H_0(y_{\alpha}) + \tau G_0(y_{\alpha}) \exp(\alpha x_{\alpha}) \sin z_{\alpha} + \dots \\ \rho_{\alpha} &= \rho_0(y_{\alpha}) + \tau R_{\alpha}(y_{\alpha}) \exp(\alpha x_{\alpha}) \sin z_{\alpha} + \dots \\ P_{\alpha} &= P_0(y_{\alpha}) + \tau P_{\alpha}(y_{\alpha}) \exp(\alpha x_{\alpha}) \sin z_{\alpha} + \dots \\ \tau &\ll 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ограничиваясь нулевым и первым приближением из (1.6) и (1.7) можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \alpha \rho_0 u_{\alpha} + \alpha u_{\alpha} R_{\alpha} + \rho_0 v'_{\alpha} + v_{\alpha} \rho'_0 - \rho_0 w_{\alpha} &= 0 \\ \alpha u_0 u_{\alpha} + v_{\alpha} u'_0 &= 0 \\ \beta [\alpha u_0 u_{\alpha} + 2u_0 u'_{\alpha}] + \frac{1}{\rho_0} P_{\alpha} u'_0 - \frac{R_{\alpha}}{\rho_0^2} \rho'_0 &= 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \rho'_0 &= -u_0^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha u_0 w_{\alpha} + \frac{R_{\alpha}}{\rho_0} &= 0 \\ \alpha u_0 G_{\alpha} + v_{\alpha} H'_0 &= 0 \\ H_0 &= \frac{\gamma-1}{\rho_0 \mu_0^2} + \frac{u_0^2}{2} \\ G_{\alpha} &= -\left(1/\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \mu_0^2\right) R_{\alpha} / \rho_0^2 + u_0 u_{\alpha} \\ \rho_0 &= \mu_0^2 (u_0^2 \mu_0^2) \rho_0 = \rho'_0 v_1(\alpha u_0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Где  $(\ )' = \frac{\partial}{\partial y}$ .

Если ввести новую переменную  $z = \frac{u_0}{u_0}$ , то тогда можно свести систему (1.8) к одному дифференциальному уравнению:

$$z'' + 2z' \left( \frac{u_0'}{u_0} \right) + z \left( -\beta + 2 \left( \frac{u_0'}{u_0 \alpha^2} \right) \right) = 0 \quad (1.10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_1(0) = 0; & \quad v_1(\infty) = 0 \\ z(\infty) = 0, & \quad z(0) = \text{const} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Это уравнение представляет собой задачу на собственные значения. Существует два пути решения уравнения (1.10) с граничными условиями (1.11): поиск собственных значений матрицы, получающейся при разностном представлении уравнения (1.10) второй путь, как результат решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты.

На рис. 1 и 2, представлены профили скорости  $z$  для различных значений  $\phi, \mu, \gamma$ .

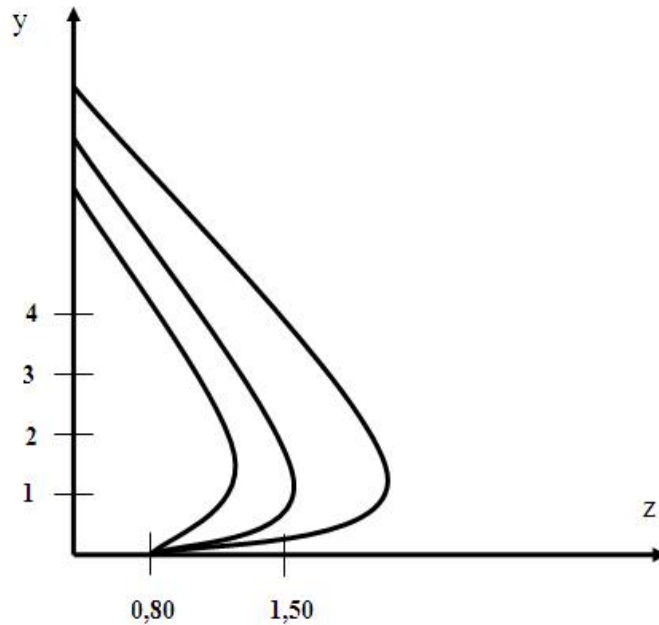


Рис. 1. График распределения скорости  $z$  при

$$\begin{aligned} \mu = 0,2, \quad \phi = 2,5, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01 \\ \mu = 0,2, \quad \phi = 0,6, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01 \\ \mu = 0,2, \quad \phi = 2,0, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 3,5, \quad \beta = 0,01 \end{aligned}$$

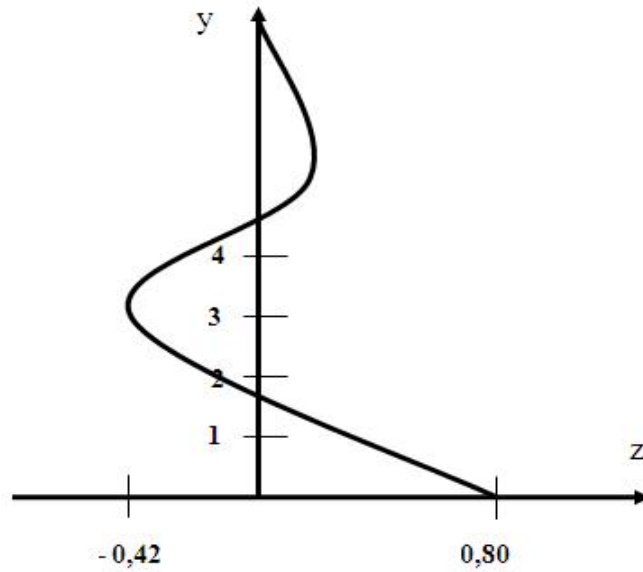


Рис. 2. График распределения скорости  $z$  при

$\mu = 1,4, \quad \phi = 1,4, \quad \gamma = 1,0, \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01$

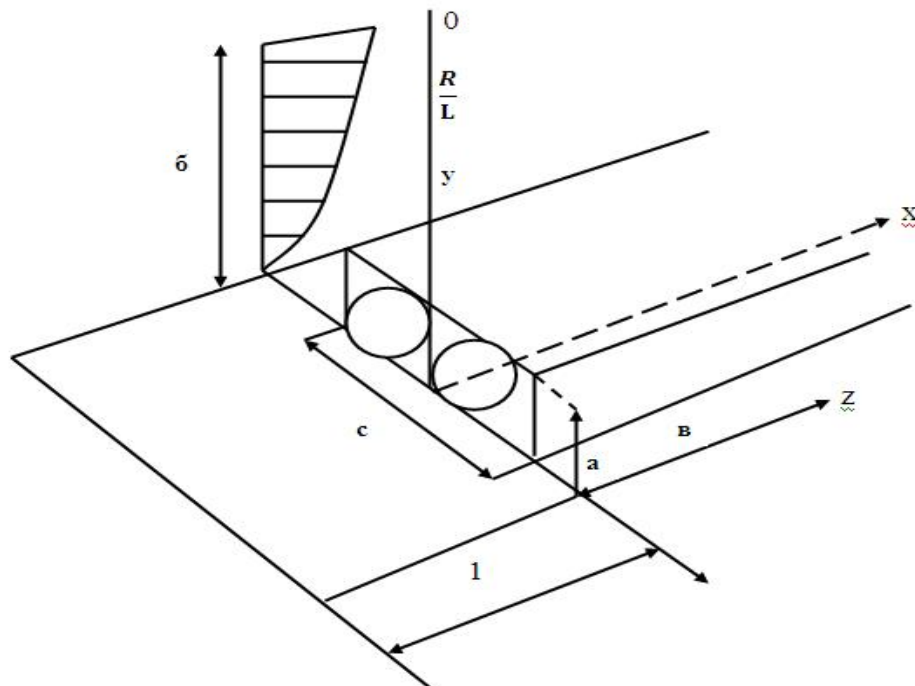


Рис. 3. Схема исследуемого течения

**Литература:**

1. Ершин Ш.А. Гидроаэродинамика. Алматы, 2013 г.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике. М., изд-во Мир, 1967 г.
3. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.

**Рецензент: к.ф.-м.н., профессор Табышов Р.Т.**