МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Каденова З.А., Орозмаматова Ж.Ш.

ЖАРЫМ ОКТО БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖӨНҮНДӨ

Каденова З.А., Орозмаматова Ж.Ш.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

Z.A. Kadenova, Zh.Sh. Orozmatova

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE OF THE FIRST KIND ON THE SEMIAXIS

УДК: 517.968

Макалада жарым окто биринчи типтеги Фредгольмдун сызыктуу интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгы маселеси каралды.

***Негизги сөздөр:** биринчи типтеги сызыктуу интегралдык теңдемелер, чыгарылышынын жалгыздыгы, жарым ок.*

В статье рассмотрены вопросы единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси.

***Ключевые слова:** линейные интеральные уравнения первого рода, единственность решений, полуось.*

In this article uniqueness of solutions to systems of linear Fredholm integral equations of the first kind in the semi axis are analized.

***Key words:** linear integral equations first kind, uniqueness of solutions, semi axis.*

Постановка задач. В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм доказана теорема единственности решений для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty),, \tag{1}$$

где $\int_a^\infty \int_a^\infty |K(t,s)|^2 dsdt < \infty,$

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается что $A(t,s)$ и $B(t,s)$ являются дважды непрерывно-дифференцируемые функции соответственно на $\{(t,s): \ a \le s \le t < \infty\}$, и $\{(t,s): \ a \le t \le s < \infty\}$, решение $u(t)$ ищется в $L_2[a,\infty)$, где $L_2[a,\infty)$,- пространства квадратично-суммируемых функций в $[a,\infty)$.

Отметим, что интегральные уравнения Вольтера первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, ранее изучались частности в [1], [4], [5], [6], [7], где были получены теоремы единственности, оценки устойчивости и построены регуляризирующие операторы. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [2,3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В работе [8], изучены вопросы регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на конечном отрезке. В данной работе, доказывается единственность решения уравнения (1), в пространстве $L_2[a,\infty)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

а) $H(t,s)=A(t,s)+B(s,t)$ имеют производные

$H'_t(t,a),\ \lim\limits_{b\to\infty}H'_s(b,s),\ H''_{st}(t,s)$ при всех $(t,s)\in G=\{(t,s), a\le s\le t<\infty\}$;

$H'_t(t,s),\ H'_s(t,s),\ H''_{st}(t,s)\in L_2(G)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty}H(t,a)\ge 0,\ H'_t(t,a)\le 0,\ \lim\limits_{t\to\infty}H'_s(t,s)\ge 0,\ H''_{st}(t,s)\le 0;$

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $H'_t(t,a)<0$ при почти всех $t\in[a,\infty)$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty}H'_s(t,s)>0$ при почти всех $s\in[a,\infty)$,

3) $H''_{st}(t,s)<0$ при почти всех $(t,s)\in G$.

В силу (2), уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds+\int_t^\infty B(t,s)u(s)ds=f(t). \tag{3}$$

Обе части уравнения (3) умножим на функцию $u(t)$ и полученное произведение интегрируем по области $a\le t<\infty$.

Тогда получим

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt+\int_a^\infty\int_t^\infty B(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt. \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt+\int_a^\infty\int_a^s B(t,s)u(s)u(t)dtds=\int_a^\infty f(t)u(t)dt,$$ т.е.

$$\int_a^\infty\int_a^t [A(t,s)+B(s,t)]u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt.$$

Обозначим

$$H(t,s)=A(t,s)+B(s,t).$$

Тогда

$$\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)ds\,u(t)dt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt. \tag{5}$$

Введем обозначения

$$z(t,s)=\int_s^t u(\nu)d\nu \quad (6)$$

Отсюда

$$d_s z(t,s)=-u(s)ds,$$
$$u(s)ds=-d_s z(t,s), \quad (7)$$
$$z(t,s)u(t)dt=\frac{1}{2}d_t\left(z^2(t,s)\right).$$

С помощью формул (6), (7) и интегрирования по частям, использую формулу Дирихле в левой части соотношения (5) преобразуем его к виду:

$$-\int_a^\infty\left[\int_a^t H(t,s)d_s z(t,s)\right]u(t)dt=-\int_a^\infty\left[H(t,s)z(t,s)\Big|_a^t-\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)ds\right]u(t)dt=$$

$$=\int_a^\infty H(t,a)z(t,a)\Big]u(t)dt+\int_a^\infty\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dsdt=\int_a^\infty H(t,a)z(t,a)u(t)dt+$$

$$+\int_a^\infty\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)dsu(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^\infty H(t,a)d_t z^2(t,a)+\int_a^\infty\int_s^\infty H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dtds=\frac{1}{2}H(t,a)z^2(t,a)\Big|_a^\infty-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\int_a^\infty\left[\int_s^\infty H'_s(t,s)d_t z^2(t,s)\right]ds=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\int_a^\infty\left[H'_s(t,s)z^2(t,s)\Big|_s^\infty-\int_s^\infty H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dtds=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)z^2(t,s)ds-\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_a^t H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dsdt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a)-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)z^2(t,s)ds-\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_a^t H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dsdt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)\left[\int_a^\infty u(s)ds\right]^2-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)\left[\int_a^t u(t)ds\right]^2dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)\left[\int_s^\infty u(\xi)d\xi\right]^2ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^t H''_{st}(t,s)\left[\int_s^t u(\xi)d\xi\right]^2dsdt,$$

где $z(t,t)=0$.

Таким образом, из (4) имеем

$$\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)dsu(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)\left[\int_a^\infty u(s)ds\right]^2-\frac{1}{2}\int_a^\infty H_t'(t,a)\left[\int_a^t u(t)ds\right]^2dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H_s'(t,s)\left[\int_s^\infty u(\xi)d\xi\right]^2ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^t H_{st}''(t,s)\left[\int_s^t u(\xi)d\xi\right]^2dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt \quad . \tag{8}$$

В силу условия а) для любого решения $u(t)$ уравнения (1) получили (8).

Пусть $f(t)\equiv 0$. Тогда в силу условий б), в) из (8) вытекает, что

$\int_a^t u(s)ds\equiv 0, или \int_s^t u(\xi)d\xi=0$. Либо $\int_t^\infty u(t)dt=0,\quad t\in[a,\infty),$

Далее, в силу условия в) $u(t)\equiv 0$.

И так, доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда решение уравнения (1) единственно в классе $L_2[a,\infty)$.

Пример. Рассмотрим уравнение (1) при a=0, $A(t,s)=\frac{s}{(1+t)^3}$

при $(t,s)\in G=\{(t,s):0\le s\le t<\infty\}$;

$B(t,s)=\frac{t}{(s+1)^2}$ при $(t,s)\in G_1=\{(t,s):0\le s\le t<\infty\}$;

$(t,s)\in L_2(0,\infty)$. В этом случае

$$H(t,s)=A(t,s)+B(s,t)=\frac{s}{(1+t)^3}+\frac{s+1}{(t+1)^2},(t,s)\in G \tag{9}$$

Из (9) имеем

$$1)\ H_t'(t,s)=-\frac{3s}{(1+t)^4}-\frac{2(s+1)}{(t+1)^3},\qquad (t,s)\in G, \tag{10}$$

$$1)\ H_s'(t,s)=\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{1}{(t+1)^2},\qquad (t,s)\in G, \tag{11}$$

$$1)\ H_{ts}''(t,s)=-\frac{3}{(1+t)^4}-\frac{2}{(t+1)^3},\qquad (t,s)\in G, \tag{12}$$

Из (9) получим $\lim_{t\to\infty}H_s'(t,0)=0.$

Из (10) имеем $H_t'(t,0)=-\frac{2}{(t+1)^3}<0$ при всех $t\in[0,\infty)$,

Из (11) получим 2) $\lim_{t\to\infty}H_s'(t,s)=0$ при всех $s\in[0,\infty)$,

Из (12) получим

$$H''_{ts}(t,s) = -\left(\frac{3}{(1+t)^4} + \frac{2}{(t+1)^3}\right) < 0, (t,s) \in G$$

Таким образом, выполняются все условия вышеуказанной теоремы т.е. выполняются условия а), б), в). Таким образом, решение следующего интегрального уравнения

$$\int_0^t \frac{s}{(1+t)^3} u(s)ds + \int_t^\infty \frac{(t+1)}{(s+1)^2} u(s)ds = f(t), t \in [0,\infty)$$

Единственно в пространстве $L_2[0,\infty)$.

Литература:

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера первого рода и третьего рода // Журнал вычислительной математики и математический физики. - Т.19. - №4, 1979. - С. 970-989.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. - 1959. - Т.127, № 1. - С. 31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука, 1980.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтера первого рода. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988. Выпуск 21. - С. 3-38.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН СССР. - 1989. - Т. 309. - № 5. - С. 1052-1055.
6. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра.// Известия АН Киргизской ССР, 1988. - №1. - С. 13-18.
7. Асанов А., Каденова З.А. О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». - Самара: СамГТУ, 2004. - Ч.3. - С. 122-126.
8. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. Самара: СамГТУ, 2005. - №38. - С. 11-14.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Асанов А.