ФУНДАМЕНТАЛДЫК ИЛИМДЕР
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
FUNDAMENTAL SCIENCE

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Абдукаримов А.М.

ЭКИНЧИ ТИПТЕГИ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕКСИЗ АЙМАКТАРДАГЫ ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН КВАДРАТТЫК ИНТЕГРАЛДАНУУСУ

Абдукаримов А.М.

КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

A.M.Abdukarimov

SQUARE-INTEGRABLE SOLUTIONS OF SYSTEMS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND ON AN INFINITE DOMAIN

УДК:515.14

[1-3] иштерде интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин чексиз аймактардагы чыгарылыштарынын жарым октогу квадраттык интегралдануусу каралган.

Бул макалада экинчи типтеги Вольтерра тибиндеги интегралдык теңдеменинКоши маселесинин системасынын чексиз аймактардагы чыгарылышынын квадраттык интегралдануусу изилденет.

В работах [1-3] были рассмотрены вопросы квадратичной интегрируемости решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается квадратичнаяинтегрируемость решения системы задачи Коши для интегрального уравненияВольтерра второго рода на бесконечных областях.

Ключевыеслова: *самосопряженные матричные функции, вектор функции, дифференцируемая вектор функция, интегрирования по частям*

In [1-3] addressed issues square-integrable solution on an endless field of integral and integro-differential equations on the half.

In this paper we study the square integrable solutions of the Cauchy problem for the Volterra integral equation of the second kind on the endless fields.

Рассматривается система

$$M(t,x)u(t,x)+\int_0^t K(t,x)A(t,x,s)K(s,x)u(s,x)ds+\int_0^x K(t,x)B(t,x,y)K(t,y)u(t.y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x)C(t,x,s,y)K(s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G=[0,\infty)\times[0,\infty)\ , \qquad (1)$$

$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G)\,, \qquad (f')$$

с условиями

$$u(0,x)=0, \qquad x\in[0,\ \ +\infty),$$
$$u(t,0)=0, \qquad t\in[0,\ \ +\infty), \qquad (*)$$

где $M(t,x)$, $A(t,x,s)$, $B(t,x,y)$ и $C(t,x,s,y)$ - самосопряженные заданные матричные функции размеров $n\times n$, а $f(t,x)$, $K(t,x)$ - заданная, $u(t,x)$ - неизвестная n - мерные вектор-функции.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: (f'),

а) вектор-функции $M(t,x), K(t,x)\in C(G), K(t,x)\geq 0, (M(t,x)-1)\geq\alpha>1$ при $(t,x)\in G$

а) матричные функции $A(t,x,s)$, $A_t(t,x,s)$, $A_s(t,x,s)$, $A_{ts}(t,x,s)\in C_{n\times n}(G_1)$ $G_1=\{(t,x,s):\ 0\leq s\leq t<\infty;\quad 0\leq x<\infty\}$, $A(t,x,0)\geq 0$ и $A_t(t,x,0)\leq 0$ при $(t,x)\in G$; $A_s(t,x,s)\geq 0$ и $A_{ts}(t,x,s)\leq 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $M(t,x), K(t,x)\in C(G)$, $M(t,x)\geq(\alpha-1)>0$;

б) матричные функции $B(t,x,y)$, $B_x(t,x,y)$, $B_y(t,x,y)$, $B_{xy}(t,x,y)\in C_{n\times n}(G_2)$ $G_2=\{(t,x,y):\ 0\leq t<\infty;\quad 0\leq y\leq x<\infty\}$, $B(t,x,0)\geq 0$ и $B_x(t,x,0)\leq 0$ при $(t,x)\in G$; $B_y(t,x,y)\geq 0$ и $B_{xy}(t,x,y)\leq 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

в) матричные функции $C(t,x,s,y), C_t(t,x,s,y), C_x(t,x,s,y), C_s(t,x,s,y)$, $C_y(t,x,s,y), C_{tx}(t,x,s,y)$, $C_{ts}(t,x,s,y), C_{sy}(t,x,s,y)$, $C_{ty}(t,x,s,y)$, $C_{tsy}(t,x,s,y), C_{xys}(t,x,s,y)$, $C_{tsxy}(t,x,s,y)$, $\in C_{n\times n}(G_3)$ $G_3=\{(t,x,s,y):\ 0\leq s\leq t<\infty;\ 0\leq y\leq x<\infty\}$, $C_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$ $C_s(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $C(t,x,0,0)\geq 0, C_t(t,x,0,0)\leq 0,$ $C_x(t,x,0,0)\leq 0,$ $C_{tx}(t,x,0,0)\geq 0$ при $(t,x)\in G$ и $C_{sy}(t,x,s,y)\geq 0$, $C_{xys}(t,x,s,y)\leq 0$, $C_{sy}(t,x,s,y)\geq 0$, $C_{tsxy}(t,x,s,y)\geq 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

г) Для любых u, $\vartheta\in R^n$ выполняется неравенство

$<-A_t(t,x,0)u,u>-2<C(t,x,0,0)u,\vartheta>-<B_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\geq 0$ при $(t,x)\in G$,

- то система уравнений (1) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G)\cap C_n(G)$.

В дальнейшем нам понадобятся легко доказуемые следующие леммы:

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\left\langle k\vartheta,\vartheta_s\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle k\vartheta,\vartheta\right\rangle_s-\frac{1}{2}\left\langle k_s\vartheta,\vartheta\right\rangle,\ \text{где}\ \left\langle u,\vartheta\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\nu_{\tau z}\right\rangle=\left\langle K\nu\right\rangle_{\tau z}-\left\langle K_\tau\nu\right\rangle_z-\left\langle K_z\nu\right\rangle_\tau+\left\langle K_{\tau z}\nu\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\vartheta,\vartheta_{sy}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle K\vartheta,\vartheta\right\rangle_{sy}-\frac{1}{2}\left\langle K_s\vartheta,\vartheta\right\rangle_y-\frac{1}{2}\left\langle K_y\vartheta,\vartheta\right\rangle_s+\frac{1}{2}\left\langle K_{sy}\vartheta,\vartheta\right\rangle-\left\langle K\vartheta_s,\vartheta_y\right\rangle,$$

где K– самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части уравнения (2.1.1) скалярно умножим на $u(t,x)$ и проинтегрируем по области $G_{tx}=\{0\leq s\leq t;\quad 0\leq y\leq x\}$. Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^x < M(s,y)u(s,y),u(s,y) > dsdy + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < K(s,y)A(s,y,\tau)K(\tau,y)u(\tau,y),u(s,y) > d\tau dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K(s,y)B(s,y,z)K(s,z)u(s,z),u(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y)C(s,y,\tau,z)K(\tau,z)u(\tau,z),u(s,y) > dzd\tau dyds =$$

$$=\int_0^t\int_0^x < f(s,y),u(s,y) > dyds\,. \tag{2}$$

Введем обозначение

$$u_1(t,x) = K(t,x)u(t,x), \quad (t,x)\in G$$

при помощью которого перепишем (2) в следующем виде

$$\int_0^t\int_0^x < M(s,y)u(s,y),u(s,y) > dsdy + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y) > d\tau dyds +$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < B(s,y,z)u_1(s,z)u_1(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z)u_1(s,y) > dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x < f(s,y),u(s,y) > dyds\,. \tag{3}$$

Преобразуем каждый из интегралов в левой части уравнения (3)по формуле интегрирования по частям и используем лемму 2.

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)u_1(\tau,y),u_1(s,y) > d\tau dyds = -\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\varphi(\xi)\right)d\tau,u_1(s,y) > dyds = \int_0^t\int_0^x < A(s,y,0)\left(\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right),$$

$$u_1(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < A_\tau(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right),u_1(s,y) > d\tau dyds =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y,0)\left(\int_0^t u_1(\xi,y)\,d\xi\right),\int_0^t u(\xi,y)\,d\xi > dy - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_s(s,y,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\times$$

$$\times\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u_1(\xi,y)\,d\xi\right),\int_\tau^t u_1(\xi,y)\,d\xi >\times$$

$$\times dyd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t < A_{\tau s}(s,y,\tau)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi > dsdyd\tau.$$

Применив формулу Дирихле, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y) > d\tau dyds = \frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y,0)\int_0^t u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_0^t u(\xi,y)\,d\xi > dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_s(s,y,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_0^s u_1(\xi,y) > d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t u_1(\xi,y)\,d\xi,$$

$$,\int_\tau^t u_1(\xi,y)\,d\xi > dyd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A_{ts}(s,y,\tau)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi > d\tau dyds\,, \tag{4}$$

где $A_t(t,x,s)$, $A_s(t,x,s)$ - частные производные по t и s соответственно.

Аналогично получим для второго слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < B(s,y,z)u_1(\tau,z)u_1(s,y) > dzdyds = \frac{1}{2}\int_0^t < B(s,x,0)\int_0^x u_1(s,\nu)d\nu, \int_0^x u_1(s,\nu)d\nu > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_y(s,y,0)\int_0^y u_1(s,\nu)d\nu, \int_0^y u_1(s,\nu)d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_z(s,x,z)\int_z^x u_1(s,\nu)d\nu,$$

$$,\int_z^x u_1(s,\nu)d\nu > dzds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < B_{zy}(s,x,\tau)\int_z^y u_1(s,\nu)d\nu, \int_z^y u_1(s,\nu)d\nu > dzdyds. \quad (5)$$

Для преобразования третьего интеграла используем лемму 2.

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z), u_1(s,y) > dzd\tau dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)dzd\tau, u_1(s,y) > dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x\left\{ < \int_0^s\int_0^y\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(C(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_\tau(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{\partial}{\partial z}C_z(s,y,\tau,z)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\tau + C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right]dzd\tau, u_1(s,y) > \right\}dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < C(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_\tau(s,y,\tau,0)\times$$

$$\times\int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > d\tau dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_z(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > dzd\tau dyds.$$

Отсюда используя лемму 3 имеем

$$\int_0^t\int_0^x < \int_0^s\int_0^y C(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z), u_1(s,y)dzd\tau > dyds = \frac{1}{2} < C(t,x,0,0)\int_0^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$,\int_0^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < C_y(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{sy}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dyds - \int_0^t\int_0^x < C(s,y,0,0)\int_0^s u_1(\xi,y)d\xi,$$

$$,\int_0^y u_1(s,\nu)d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t < C_\tau(t,x,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\xi d\nu, \int_\tau^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\xi d\nu > d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < C_{\tau s}(s,x,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > d\tau ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < C_{\tau y}(t,y,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dy d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_{\tau sy}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > d\tau dy ds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_{\tau}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu > d\tau dy ds + \frac{1}{2}\int_0^x < C_z(t,x,0,z)\int_0^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,$$

$$,\int_0^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{zs}(s,x,0,z)\int_0^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_0^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y < C_{zy}(t,y,0,z)\int_0^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_0^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_{zsy}(s,y,0,z)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_0^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz dy ds$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_z(s,y,0,z)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_z^y u_1(s,y)\,d\nu > dz dy ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_{\tau zy}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz dy d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > d\tau dz ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz d\tau dy ds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu > dz d\tau dy ds. \qquad (6)$$

Учитывая формулы (4), (5), (6) и – условия (г), из (3) имеем

$$\int_0^t\int_0^x < M(s,y)u(s,y),u(s,y) > ds dy + \frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y,0)\int_0^t u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_0^t u_1(\xi,y)\,d\xi > dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\Bigg[< -A_s(s,y,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi > -$$

$$-2 < C(s,y,0,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu > - < B_y(s,y,0)\times$$

$$\times\int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu,\int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu > \Bigg] dy ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\Bigg\{ - < \frac{A_{\tau s}(s,y,\tau)}{y}\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi > -$$

$$-2 < C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi,\int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu > - < \frac{B_{zy}(s,y,\tau)}{s}\int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu,\int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu > \Bigg\}\times$$

$$\times dzd\tau dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left[<A_\tau\left(t,y,\tau\right)\int_\tau^t u_1\left(\xi,y\right)d\xi,\int_\tau^t u_1\left(\xi,y\right)d\xi>dyd\tau+\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^x<B_z\left(s,x,z\right)\int_z^x u_1\left(s,\nu\right)d\nu,\int_z^x u_1\left(s,\nu\right)d\nu>+\frac{1}{2}\int_0^x<A\left(t,y,0\right)\times$$

$$\times\int_0^x u_1\left(\xi,y\right)d\xi,\int_0^t u_1\left(\xi,y\right)d\xi>dy+\frac{1}{2}\int_0^t<B\left(s,x,0\right)\int_0^x u_1\left(s,\nu\right)d\nu,\int_0^x u_1\left(s,\nu\right)d\nu>ds+$$

$$+\frac{1}{2}<C\left(t,x,0,0\right)\int_0^t\int_0^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t<C_s\left(s,x,0,0\right)\int_0^s\int_0^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x<C_y\left(t,y,0,0\right)\int_0^t\int_0^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<C_{sy}\left(s,y,0,0\right)\int_0^s\int_0^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<C_{\tau z}\left(t,x,\tau,z\right)\int_\tau^t\int_z^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>dzd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y<C_{\tau zy}\left(t,y,\tau,z\right)\int_\tau^t\int_z^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>dzdyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s<C_{\tau zs}\left(s,x,\tau,z\right)\int_\tau^t\int_z^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^x u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>d\tau dzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<C_{\tau zsy}\left(s,y,\tau,z\right)\int_\tau^t\int_z^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^y u_1\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi>dzd\tau dyds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x<f(s,y),u(s,y)>dyds. \tag{7}$$

В силу условий а), б), в) и г) из (7) имеем

$$\int_0^t\int_0^x<M\left(s,y\right)u\left(s,y\right),u\left(s,y\right)>dyds\le\int_0^t\int_0^x\left\|f(s,y)\right\|\left\|u(s,y\right\|dyds.$$

$$\alpha\int_0^t\int_0^x\left\|u\left(s,y\right)\right\|^2dyds\le\int_0^t\int_0^x\left\|f(s,y)\right\|\left\|u(s,y\right\|dyds \tag{8}$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского

$$\int_0^t\int_0^x\left\|f(s,y)\right\|\left\|u\left(s,y\right)\right\|dyds\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left\|f(s,y)\right\|^2dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left\|u(s,y)\right\|^2dyds. \tag{9}$$

В левой части неравенства (8) применяя (9), получим

$$\alpha\int_0^t\int_0^x\left\|u\left(s,y\right)\right\|^2dyds\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left\|f(s,y)\right\|^2dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left\|u(s,y)\right\|^2dyds \tag{10}$$

$$(2\alpha-1)\int_0^t\int_0^x\left\|u\left(s,y\right)\right\|^2dyds\le\int_0^t\int_0^x\left\|f(s,y)\right\|^2dyds$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t\int_0^x \left\|u\left(s,y\right)\right\|^2 dyds \le \frac{1}{(2\alpha-1)}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds \text{ при } \left(t,x\right)\in G. \qquad (11)$$

Из последнего неравенства, переходя к пределу при $t\to\infty$ и $x\to\infty$, получим

$$\left\|u\left(t,x\right)\right\|_{L_{2,n}(G)} = \int_0^\infty\int_0^\infty \left\|u\left(s,y\right)\right\|^2 dyds \le \frac{1}{(2\alpha-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds = \frac{1}{(2\alpha-1)}\left\|f\left(t,x\right)\right\|_{L_{2,n}(G)}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно- возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. - 352 с.
2. Искандаров С. О принадлежности пространству $L^2\left[t_0,\infty\right)$ решения интегрального уравнения Вольтерра //Тез.докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методом в теории сингулярно-возмущенных уравнений. –Алма-Ата: Наука, 1979. - Ч. 1. - С. 150-151.
3. Искандаров С. Об ограниченности и устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1979. - С. 85-102.
4. Асанов А., Бекешов Т.О. Об одном классе систем интегральных нелинейных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 1997.– Вып. 26 – С. 101- 107.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.