Байгесеков А.М.

ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ӨЗГӨРМӨЛӨРҮ МУЛЬТИПЛИКАТИВДҮҮ БӨЛҮНГӨН ЯДРОЛУУ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАРЫМ ОКТО КВАДРАТТЫК ИНТЕГРАЛДАНЫШЫ ЖӨНҮНДӨ

Байгесеков А.М.

О КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ВТОРОГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

A.M. Baigesekov

ABOUT SQUARE-INTEGRABLE ON THE HALF-SOLUTIONS OF LINEAR VOLTERRA-STIELTJES INTEGRAL EQUATION SECOND KIND WITH A DEGENERATE KERNEL

УДК: 517.968

Сызыктуу экинчи түрдөгү Вольтерра-Стилтьес интегралдык тендемесинин чыгарылышынын жарым окто абсолюттук интегралданышынын жетиштүү шарттары анын ядросунун өзгөрмөлөрү мультипликативдүү бөлүнгөн учурда алынат. Изилдөө учурунда теңдеменин бош мүчөсү аталган касиетке ээ болбой калышы мүмкүн экендиги көрсөтүлөт. Теңдемелерди өзгөртүү методу, кесүүчү функциялар методунун идеясы жана бөлүктөп интегралдоо методу пайдаланылат. Интегралдоо өсүүчү функция боюнча жүргүзүлөт. Иллюстративдик мисалдар тургузулат.

***Негизги сөздөр:** Вольтерра – Стилтьес интегралдык теңдемеси, өсүүчү функция боюнча туунду, өзгөрмөлөр, мультипликативдүү бөлүнгөн ядро, квадраттык интегралданыш, квадраттык интегралданбаган бош мүчө.*

Устанавливаются достаточные условия квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра – Стилтьеса в случае вырожденности ядра. При этом показывается, что свободный член уравнения может не обладать изучаемым свойством. Используются метод преобразования уравнений, идея метода срезывающих функций и метод интегрирования по частям. Интегрирование проводится по возрастающей функции. Строятся иллюстративные примеры.

***Ключевые слова:** интегральное уравнение Вольтерра – Стилтьеса, производная по возрастающей функции, вырожденное ядро, квадратичная интегрируемость, квадратично неинтегрируемый свободный член.*

We establish sufficient conditions for quadratic integrable on the half-solutions of linear integral equations of Volterra - Stieltjes in the case of the degeneracy of the kernel. This shows that the free term of the equation may not have studied the properties. Izpolzuyutsya method for transforming equations, the idea of the method of cutting functions and the method of integration by parts. The integration is carried out by an increasing function. Construct illustrative examples.

***Key words:** integral equation Volterra - Stieltjes, derivative on increasing function, degenerate core, square-integrable, square nonintegrable free term.*

Прежде всего отметим, что перевод «вырожденное ядро» на кыргызский язык слово сочетанием «өзгөрмөлөрү мультипликативдүү бөлүнгөн ядро» предложила Б.А. Шайжигитова [1]. Также отметим, что данная статья написана под влиянием исследований С. Искандарова $\left[2, c.46-53\right]$.

Все фигурирующие ниже функции являются непрерывными и соотношения справедливы при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$;

ИУВС- интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

Рассмотрим ИУВС второго рода вида

$$x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau) = f(t), \quad t \ge t_0, \qquad (1)$$

где $g(t)$- возрастающая функция и $dg(\tau)$ понимается в смысле определения А.Асанова [3].

Ставится

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия типа знака функций принадлежности пространству $L_g^2(J,R)$ решения ИУВС (1) без предположения, что его свободный член $f(t) \in L_g^2(J,R)$.

Литературный обзор показывает, что эта задача ранее другими авторами не исследована. Заметим, что подобная задача ранее решена во многих работах С. Искандарова, например, в $[2,4,5]$.

В настоящей работе будем использовать следующие обозначения из [3]: $x(t) \in L_g^2(J,R)$ означает $\int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^2 dg(t) < \infty$;

$$q'_{g(t)} = \frac{dq(t)}{dg(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta g(t)}$$ (если предел существует) .

Введем предположения и обозначения, аналогично $[2, c.51]$:

Пусть

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) Q_i(t), \quad (K)$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t), \ (f)$$

$n \geq m$, $R_i(t) \equiv P_i(t)(Q_i(t))^{-1} \quad (i = 1, \ldots, m), \quad T_i(t) \equiv Q_i(t)(P_i(t))^{-1} \quad (i = m+1, \ldots, n)$, $E_i(t) \equiv f_i(t)(Q_i(t))^{-1} \quad (i = 1, \ldots, m)$.

Далее для решения $x(t)$ ИУВС (1) умножаем на $x(t)$, интегрируем по $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям , при этом вводим условия (K), (f), функции $R_i(t)$, $T_i(t)$ и некоторые функции $c_i(t) \quad (i = 1, \ldots, m)$ аналогично [5]:

$$\int_{t_0}^{t} c'_{ig(s)}(s) dg(s) = c_i(t) - c_i(t_0) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Тогда получаем тождество:

$$\begin{aligned} &2\int_{t_0}^{t} (x(s))^2 dg(s) + \sum_{i=1}^{m} \Big\{ \big[R_i(t)(X_i(t))^2 - 2E_i(t) X_i(t) + c_i(t) \big] - \\ &- \int_{t_0}^{t} \big[R'_{ig(s)}(s)(X_i(s))^2 - 2E'_{ig(s)}(s) X_i(s) + c'_{ig(s)}(s) \big] dg(s) \Big\} + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{n} \left[T_i(t_0) \left(\int_{t_0}^{t} P_i(\eta) x(\eta) dg(\eta) \right)^2 + \int_{t_0}^{t} T'_{ig}(\tau) \left(\int_{\tau}^{t} P_i(\eta) x(\eta) dg(\eta) \right)^2 dg(\tau) \right] \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i(t_0), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$X_i(t) \equiv \int_{t_0}^{t} Q_i(\eta) x(\eta) dg(\eta) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Из тождества непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА. Пусть 1) выполняются условия (K), (f);

2) $R_i(t) \geq 0$, $R'_{ig(t)}(t) \leq 0$, существуются функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i(t))^2 \leq R_i(t)\, c_i(t)$, $(E'_{ig(t)}(t))^2 \leq R'_{ig(t)}(t)\, c'_{ig(t)}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m)$;

3) $T_i(t_0) \geq 0$, $\quad T'_{ig(t)}(t) \geq 0 \qquad (i = m+1, \ldots, n)$.

Тогда решения $x(t)$ ИУВС (1) принадлежит пространству $L_g^2(J,R)$.

Из этой теоремы можно получить следующее

СЛЕДСТВИЕ. Решение $x(t)$ ИУВС:

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{m}P_i(t)P(\tau)x(\tau)dg(\tau)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i P_i(t), \quad t\ge t_0 \quad (3)$$

принадлежит пространству $L_g^2(J,R)$.

В данном случае $P_i(t)\equiv Q_i(t),\ \ R_i(t)\equiv 1,\ \ E_i(t)\equiv\alpha_i$,

$c_i(t)\equiv\alpha_i^{\,2} \quad (i=1,\ldots,m)$.

ПРИМЕР 1. ИУВС:

$$x(t)+\int_0^t\left[\left(\sqrt{t}+3\right)\left(\sqrt{\tau}+2\right)+\left(\sqrt{t}+2\right)\left(\sqrt{\tau}+1\right)\right]x(\tau)\,d\sqrt{\tau}=-5\left(\sqrt{t}+4\right),\ \ t\ge 0$$

удовлетворяет все условиям теоремы, здесь $t_0=0,\ g(t)=\sqrt{t},\ n=2,\ m=1,$

$R_1(t)\equiv\left(\sqrt{t}+3\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1},\ \ E_1(t)\equiv-5\left(\sqrt{t}+4\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1},$

$c_1(t)\equiv 25\left(\sqrt{t}+22\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1},\ \ T_2(t)\equiv\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+2}.$

Значит, его решение этого ИУВС $x(t)\in L_{\sqrt{t}}^2(R_+,R)$.

ПРИМЕР 2. Для ИУВС

$$x(t)+\int_0^t\left(\sqrt{t}+6\right)\left(\sqrt{\tau}+6\right)x(\tau)\,d\sqrt[3]{\tau}=4\left(\sqrt{t}+6\right),\ \ t\ge 0$$

выполняются все условия следствия. Здесь $m=1,\ \ P_1(t)\equiv\sqrt{t}+6,\ \ \alpha_1=4.$

Литература:

1. *Шайжигитова Буурабия А.* Котормо маселелери жана кыргыз тилиндеги математикалык терминдердин калыптанышы жөнүндө//Исслед. по интегро–дифференциал. уравнениям. –Бишкек: Илим, 2014. –Вып. 46. –С. 176–177.
2. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. –216 с.
3. *Асанов А.* Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. – Бишкек: Кыргызско-Турецкий университет «Манас», 2001. – С. 18–64.
4. *Искандаров С.* О принадлежности пространству $L^2[t_0,\infty)$ решения интегрального уравнения Вольтерра // Тез. докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1979. – Ч.1. – С.150-151.
5. *Искандаров С.* К вопросу о принадлежности пространству $L^2[t_0,\infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1980. – Вып. 13. – С. 193–198.

Рецензент: д.ф.-м.н. Байзаков А.Б.