Асанов А., Байгесеков А.М.

ЭКИ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЧЕКТЕЛИШИ

Асанов А., Байгесеков А.М.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ВТОРОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

A. Asanov, A.M. Baigesekov

BOUNDED SOLUTIONS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS - STIELTJES SECOND KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

УДК: 517.968

Макалада изилдөөнүн актуалдуулугу баса белгиленген. Чектелбеген областтагы эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын чектелишинин жетиштүү шарттары аныкталган. Чыгарылыштардын баасы табылган. Иллюстративдик мисалдар каралат.

Негизги сөздөр: *Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемеси, өсүүчү функция, баа, чектелиш, сызыктуу жана сызыктуу эмес.*

В данной статье подчеркнута актуальность проводимого исследования. Установлены достаточные условия ограниченности решений линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченной области. Получены оценки решений. Построены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: *интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса, возрастающая функция, оценка, ограниченность, линейность и нелинейность.*

To highlight the relevance of the research. Sufficient conditions for the boundedness of solutions of linear and non-linear integral equations of the Volterra - Stieltjes second order with two independent variables in an unbounded domain. To obtain a solution evaluation. Built illustrative examples.

Key words: *integral equation of Volterra - Stieltjes, increasing function, assessment, limitation, linearity and non-linearity.*

Одновременно рассмотрим следующие линейные и нелинейные интегральные уравнения: $u(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t} K_0(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b} K_1(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x)$,

(1) $$v(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t} H_0(t,x,s,v(s,x))\,d\varphi(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b} H_1(t,x,s,y,v(s,y))\,d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x),$$

(2)

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $K_0(t,x,s), K_1(t,x,s,y)$, $H_0(t,x,s,v)$, $H_1(t,x,s,y,v)$, $f(t,x)$ - известная функция; $u(t,x)$ и $v(t,x)$-неизвестные функции ,

$G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty,\ a\le x\le b\}$,

$G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty,\ a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$.

Рассматривается задача об ограниченности решений интегральных уравнений (1), (2) в области G. Такая задача актуальна в связи с исследованиями из монографий $[1-3]$.

Пусть выполняются следующие условия:

а) $K_0(t,x,s)$ – непрерывная функция на G_0, $|K_0(t,x,s)||\varphi'(s)|\le l_1(s)$ при всех $(t,x,s)\in G_0$, а $l_1(s)\in L_1[t_0,\infty)$ и $l_1(s)$-неотрицательная функция на $[t_0,\infty)$.

б) $K_1(t,x,s,y)$-непрерывная функция на G_1, $|K_1(t,x,s,y)||\varphi'(s)|\le l_2(s)$ при всех $(t,x,s,y)\in G_1$, а $l_2(s)\in L_1[t_0,\infty)$ и $l_2(s)$-неотрицательная функция на $[t_0,\infty)$.

в) $f(t,x)$-непрерывная функция на G, $\sup\limits_{(t,x)\in G}\left|f(t,x)\right| = f_0 < \infty$.

г) $H_0(t,x,s,v)$ – непрерывная функция на $G_0 \times R$,

$\left| H_0(t,x,s,v)\right|\left|\varphi'(s)\right| \le l_1(s)|v|$ и при всех $(t,x,s,v)\in G_0\times R$, $0 \le l_1(s)$при всех, $s\in[t_0,\infty)$, $l_1(s)\in L_1[t_0,\infty)$;

д) $H_1(t,x,s,y,v)$ – непрерывная функция на $G_1 \times R$,

$\left| H_1(t,x,s,y,v)\right|\left|\varphi'(s)\right| \le l_2(s)|v|$ и при всех $(t,x,s,y,v)\in G_1\times R$, $0\le l_2(s)$при всех, $s\in[t_0,\infty)$, $l_2(s)\in L_1[t_0,\infty)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда интегрального уравнения (1) существует единственное непрерывное ограниченное решения уравнения (1) и справедлива оценка

$\sup\limits_{(t,x)\in G}\left|u(t,x)\right| \le Cf_0$, (3)

где $C = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{\infty}\left[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))\right]ds\right\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1) получаем

$$\left|u(t,x)\right| \le \int\limits_{t_0}^{t} l_1(s)\left|u(s,x)\right| ds + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b} l_2(s)\left|u(s,y)\right| d\psi(y)ds + f_0 . \qquad (4)$$

Вводим обозначение:

$v(t) = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left| u(t,x)\right|$

Тогда из (4) имеем

$$v(t) \le \int\limits_{t_0}^{t}\left[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))\right]v(s)ds + f_0 , \qquad t\ge t_0 . \qquad (5)$$

В силу неравенства Гронуолла-Беллмана имеем

$$v(t)\le f_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))\right] ds\right) .$$

Отсюда вытекает оценка (3). Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение

$$u(t,x) = \int\limits_{0}^{t}\frac{1}{\left(1+t^2+x^2+s^2\right)(3+s)}u(s,x)d\varphi(s) + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1}\frac{2}{\left(3+t^3+x+y+s^2\right)(1+s)}u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) + e^{-t}\sin x$$

Здесь $t_0 = 0$, $a=0$, $b=1$, $\varphi(t)=t^2$, $\psi(x)=x^3$, $\varphi'(t)=2t$, $\psi(1)=1$, $\psi(0)=0$,

$$K_0(t,x.s) = \frac{1}{\left(1+t^2+x^2+s^2\right)(3+s)}, \qquad K_1(t,x,s,y) = \frac{2}{\left(3+t^3+x+y+s^2\right)(1+s)},$$

$$\left|K_0(t,x,s)\right|\left|\varphi'(s)\right| = \frac{2s}{(3+s)\left(1+t^2+x^2+s^2\right)} \le \frac{1}{1+s^2} = l_1(s) ,$$

$$\left|K_1(t,x,s,y)\right|\left|\varphi'(s)\right| = \frac{2s}{(1+s)\left(3+t^3+x+y+s^2\right)} \le \frac{2}{3+s^2} = l_2(s),$$

$\left|f(t,x)\right| = \left|e^{-t}\sin x\right| \le 1 = f_0$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$u(t,x)=\int_0^t \frac{5\sin(t+x)}{1+t^3+x+s^2}u(s,x)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^1 \frac{7\cos(t+x+s)}{5+t^3+x^2+y^2+s^2}u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+3\cos(t+x)$$

Здесь $t_0=0$, $a=0$, $b=1$, $\varphi(s)=s$, $\psi(x)=\sqrt{x}$, $\varphi'(s)=1$, $\psi(1)=1$, $\psi(0)=0$,

$$K_0(t,x,s)=\frac{5\sin(t+x)}{1+t^3+x+s^2}, \qquad K_1(t,x,s,y)=\frac{7\cos(t+x+s)}{5+t^3+x^2+y^2+s^2},$$

$$\left|K_0(t,x,s)\right|\left|\varphi'(s)\right|=\frac{5\left|\sin(t+x)\right|}{\left|1+t^3+x+s^2\right|}\le\frac{5}{1+s^2}=l_1(s),$$

$$\left|K_1(t,x,s,y)\right|\left|\varphi'(s)\right|=\frac{7\left|\cos(t+x+s)\right|}{\left|5+t^3+x^2+y^2+s^2\right|}\le\frac{7}{5+s^2}=l_2(s),$$

$$\left|f(t,x)\right|=\left|3\cos(t+x)\right|\le 3=f_0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия в), г) и д). Тогда любое непрерывное решение интегрального уравнения (2) ограничено в G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) получаем

$$\left|v(t,x)\right|\le\int_{t_0}^t l_1(s)\left|v(s,x)\right|ds+\int_{t_0}^t\int_a^b l_2(s)\left|v(s,y)\right|d\psi(y)ds+f_0, \qquad (6)$$

Отсюда вводя обозначение:

$$g(t)=\sup_{x\in[a,b]}\left|v(t,x)\right|,$$

из (6) имеем

$$g(t)\le\int_{t_0}^t\left[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))\right]g(s)ds+f_0, \qquad t\ge t_0. \qquad (7)$$

В силу неравенства Гронуолла-Беллмана имеем

$$g(t)\le f_0\exp\left(\int_{t_0}^t\left[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))\right]ds\right),$$

из которого вытекает

$$\sup_{(t,x)\in G}\left|v(t,x)\right|\le Cf_0, \qquad (8)$$

где $C=\exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))\right]ds\right\}$.

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение

$$v(t,x)=\int_0^t\frac{v(s,x)}{\left[1+v^2(s,x)\right]\left(1+t^2+s^2\right)^2}d\left(s^3\right)+\int_0^t\int_0^1\frac{v^2(s,y)d\left(\sqrt{y}\right)d\left(s^3\right)}{\left[2+v^2(s,y)\right]\left(1+2t^4+s^2\right)^2}+\frac{t^2x^4}{1+t^2},\ t\ge 0, x\in[0,1].$$

Здесь $t_0=0$, $a=0$, $b=1$, $\varphi(s)=s^3$, $\psi(y)=\sqrt{y}$, $\varphi'(s)=3s^2$, $\psi(1)=1$, $\psi(0)=0$,

$$H_0(t,x,s,v)=\frac{v(s,x)}{\left[1+v^2(s,x)\right]\left(1+t^2+s^2\right)^2},$$

$$H_1(t,x,s,y,v)=\frac{v^2(s,y)}{\left[2+v^2(s,y)\right]\left(1+2t^4+s^2\right)^2},$$

$$\left|H_0(t,x,s,v)\right|\left|\varphi'(s)\right|=\left|\frac{3s^2v(s,x)}{\left[1+v^2(s,x)\right]\left(1+t^2+s^2\right)^2}\right|\le\frac{3}{1+s^2}|v|=l_1(s)|v|,$$

$$\left|H_1(t,x,s,y,v)\right|\left|\varphi'(s)\right|=\left|\frac{3s^2v^2(s,y)}{\left[2+v^2(s,y)\right]\left(1+2t^4+s^2\right)^2}\right|\le\frac{3}{1+s^2}|v|=l_2(s)|v|,$$

$$\left|f(t,x)\right|=\left|\frac{t^2x^4}{1+t^2}\right|\le\frac{1}{1+t^2}\le 1=f_0,$$

$$C=\exp\left\{\int_0^\infty\left[\frac{3}{1+s^2}+\frac{3}{1+s^2}(1-0)\right]ds\right\}=\exp\left\{6arctgs\Big|_0^\infty\right\}=\exp\left\{6\left(arctg\infty-arctg0\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{6\cdot\frac{\pi}{2}\right\}=e^{3\pi}. \quad \text{т.е.} \quad \sup_{(t,x)\in G}\left|v(t,x)\right|\le e^{3\pi}f_0=e^{3\pi}.$$

Литература:

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости.-М: Наука , 1967.-224с.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.-Изд.второе.-М: Наука, 1972.-352с.
3. *Тышкевич В.А.* Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.-Киев: Наук. думка, 1981.-80с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Халилов А.Т.