

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Мамытов А.О.

**БИР КЛАССТАГЫ СЫЗЫКТУУ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО**

Мамытов А.О.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

A.O. Mamytov

**DETERMINATION OF THE RIGHT TO A CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL
EQUATION OF THE FOURTH ORDER**

УДК: 517.95

Бул иште ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык тендеменин оң жагын аныктоо тескери маселе изилденди. Ал үчүн Гриндин функциясынын жардамы менен түз маселе эквиваленттуу интегралдык теңдемеге алынып келинди жана маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденди. Анан тескери маселелердин ыкмаларын пайдаланып, тиешелүү тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденди.

Негизги сөздөр: тескери маселе, Гриндин функциясы, Вольтерра тендемеси, жекече туундулуу дифференциалдык тендеме.

В работе исследована обратная задача определения правой части для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с переопределением во внутренних точках. Сначала с помощью функции Грина исходная прямая задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь методами обратных теорий задач, доказывается существование и единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение с частными производными, функция Грина, уравнения Вольтерра.

We have studied the inverse problem of determining the right-hand side for a differential equation with partial derivatives of the fourth order with a redefinition of the interior points. First, using the Green's function initial direct problem converges to an equivalent problem, for which we prove the existence and uniqueness of solutions. Next, using the methods of the theory of inverse problems, we prove the existence and uniqueness of solutions to the inverse problem.

Key words: inverse problem, differential equations with partial derivatives of the Green's function, Volterra equation.

Исследуется следующее обратное задача:

Найти функции $u(t, x) \in C^{2,2}(G)$ и $\varphi(t) \in C[0, T]$, $G = [0, T] \times [0, 1]$ удовлетворяющие уравнению

$$u_{tt}(t, x) = a_0 u_{ttxx}(t, x) + a_1 u_{xx}(t, x) + b_1(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + b_2(t, x) u(t, x) + \varphi(t) f(t, x) + F(t, x), \forall (t, x) \in G = [0, T] \times [0, 1] \quad (1)$$

и заданным начальным и краевым условиям

$$u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), x \in [0, 1] \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, t \in [0, T] \quad (3)$$

где известны следы решения $u(t, x)$ в точке x_1 ,

$$u(x_1, t) = g(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Далее предположим, что выполняется условия согласования

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, g(0) = u_0(x_1), \quad (5)$$

К настоящему времени обратные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую почти во все сферы математики, включая алгебру, анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и др. С другой стороны, теория обратных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в физике, медицине, экологии, экономике.

На данный момент в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка. Различные обратные задачи в подобной постановке рассмотрены в работах [1-6]. В данной работе рассматривается обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка.

Вводя новую неизвестную функцию

$$v(t, x) = u_{tt}(t, x), \quad (6)$$

из (6) имеем

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \int_0^t v(s, x) ds + u_1(x), \\ u(t, x) &= \int_0^t \int_0^s v(\tau, x) d\tau ds + u_1(x)t + u_0(x) = \\ &= \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + u_1(x)t + u_0(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (6) и (7) из (1) получим

$$\begin{aligned} v(t, x) &= a_0 v_{xx}(t, x) + a_1 \left[\int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds + u_1''(x)t + u_0''(x) \right] + \\ &+ b_1(t, x) \left[\int_0^t (t-s)v_x(s, x) ds + u_1'(x)t + u_0'(x) \right] + b_2(t, x) \left[\int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \right. \\ &\left. + u_1(x)t + u_0(x) \right] + \varphi(t)f(t, x) + F(t, x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_{xx}(t, x) &= -\frac{a_1}{a_0} \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds - \frac{1}{a_0} u_1''(x)t - \frac{1}{a_0} u_0''(x) - \\ &- \frac{1}{a_0} b_1(t, x) \left[\int_0^t (t-s)v_x(s, x) ds + u_1'(x)t + u_0'(x) \right] - \\ &- \frac{1}{a_0} b_2(t, x) \left[\int_0^t (t-s)v(s, x) ds + u_1(x)t + u_0(x) \right] - \\ &- \frac{1}{a_0} \varphi(t)f(t, x) - \frac{1}{a_0} F(t, x) + \frac{1}{a_0} v(t, x) \end{aligned} \quad (8)$$

вводя обозначения

$$F_1(t, x) = -\frac{1}{a_0} u_1''(x)t - \frac{1}{a_0} u_0''(x) - \frac{1}{a_0} b_1(t, x)[u_1'(x)t + u_0'(x)] -$$

$$-\frac{1}{a_0} b_2(t, x)[u_1(x)t + u_0(x)] - \frac{1}{a_0} F(t, x). \quad (9)$$

Уравнение (8) запишем в виде

$$v_{xx}(t, x) = -\frac{a_1}{a_0} \int_0^t (t-s) v_{xx}(s, x) ds - \frac{1}{a_0} \int_0^t (t-s) b_1(t, x) v_x(s, x) ds -$$

$$-\frac{1}{a_0} b_2(t, x) \int_0^t (t-s) v(s, x) ds - \frac{1}{a_0} \varphi(t) f(t, x) + \frac{1}{a_0} v(t, x) + F_1(t, x). \quad (10)$$

Применяя $R(t, s) = \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} sh\left\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\right\}$ ядро $K(t, s) = -\frac{a_1}{a_0}(t-s), \frac{a_1}{a_0} < 0$ из (10)

имеем

$$v_{xx}(t, x) = -\frac{1}{a_0} \int_0^t (t-\tau) b_1(t, x) v_x(\tau, x) d\tau - \frac{1}{a_0} b_2(t, x) \int_0^t (t-\tau) v(\tau, x) d\tau +$$

$$+\frac{1}{a_0} v(t, x) - \frac{1}{a_0} \varphi(t) f(t, x) + F_1(s, x) -$$

$$-\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh\left\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\right\} \left\{ \frac{1}{a_0} b_1(s, x) \int_0^s (s-\tau) v_x(\tau, x) d\tau + \right.$$

$$+\frac{1}{a_0} b_2(s, x) \int_0^s (s-\tau) v(\tau, x) d\tau - \frac{1}{a_0} v(s, x) +$$

$$\left. +\frac{1}{a_0} \varphi(s) f(s, x) - F_1(s, x) \right\} ds. \quad (11)$$

Вводя обозначения

$$F_2(t, x) = F_1(t, x) + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh\left\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\right\} F_1(s, x) ds \quad (12)$$

и применяя формулы Дирихле из (11) имеем

$$\begin{aligned}
 v_{xx}(t, x) - \frac{1}{a_0} v(t, x) = & -\frac{1}{a_0} \int_0^t [b_1(t, x)(t - \tau) + \\
 & + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_\tau^t sh\left\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)\right\} b_1(s, x)(s - \tau) ds] v_x(\tau, x) d\tau - \\
 & - \frac{1}{a_0} \int_0^t [b_2(t, x)(t - \tau) + \\
 & + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_\tau^t sh\left\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)\right\} b_2(s, x)(s - \tau) ds] v(\tau, x) d\tau - \\
 & - \frac{1}{a_0} [\varphi(t) f(t, x) + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh\left\{\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)\right\} f(s, x) \varphi(s) ds] + \\
 & + F_2(t, x).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Используя функция Грина $G(x, \xi)$ определенную в работе [2] Лемма 2, из (13) получим

$$\begin{aligned}
 v(t, x) = & \int_0^t G(x, \xi) \left\{ -\frac{1}{a_0} \int_0^t [b_1(t, \xi)(t - \tau) + \right. \\
 & + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_\tau^t sh\left(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)\right) b_1(s, \xi)(s - \tau) ds] v_\xi(\tau, \xi) d\tau - \\
 & - \frac{1}{a_0} \int_0^t [b_2(t, \xi)(t - \tau) + \\
 & + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_\tau^t sh\left(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)\right) b_2(s, \xi)(s - \tau) ds] v(\tau, \xi) d\tau - \\
 & - \frac{1}{a_0} \varphi(t) f(t, \xi) + \\
 & + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh\left(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)\right) f(s, \xi) \varphi(s) ds] + \\
 & \left. + F_2(t, \xi) \right\} d\xi,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(-\frac{\sqrt{a}}{4sh\frac{1}{\sqrt{a}}} [e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} sh\frac{\xi}{\sqrt{a}} - sh\frac{1-\xi}{\sqrt{a}}] + \frac{\sqrt{a}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}} \right) e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} + \\ + \left(-\frac{\sqrt{a}}{4sh\frac{1}{\sqrt{a}}} [sh\frac{1-\xi}{\sqrt{a}} - e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} sh\frac{\xi}{\sqrt{a}}] - \frac{\sqrt{a}}{4} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{a}}} \right) e^{\frac{x}{\sqrt{a}}}, 0 \leq x \leq \xi; \\ \left(-\frac{\sqrt{a}}{4sh\frac{1}{\sqrt{a}}} [e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} sh\frac{\xi}{\sqrt{a}} - sh\frac{1-\xi}{\sqrt{a}}] - \frac{\sqrt{a}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}} \right) e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} + \\ + \left(-\frac{\sqrt{a}}{4sh\frac{1}{\sqrt{a}}} [sh\frac{1-\xi}{\sqrt{a}} - e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} sh\frac{\xi}{\sqrt{a}}] + \frac{\sqrt{a}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}} \right) e^{\frac{x}{\sqrt{a}}}, 0 \leq \xi \leq x. \end{cases} \quad (15)$$

Вводим обозначения

$$K_1(t, x, \xi, \tau) = -\frac{1}{a_0} G(x, \xi) [b_1(t, \xi)(t - \tau) + \\ + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_{\tau}^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)) b_1(s, \xi)(s - \tau) ds], \quad (16)$$

$$K_2(t, x, \xi, \tau) = -\frac{1}{a_0} G(x, \xi) [b_2(t, \xi)(t - \tau) + \\ + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_{\tau}^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)) b_2(s, \xi)(s - \tau) ds], \quad (17)$$

$$m(t, x) = -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x, \xi) f(t, \xi) d\xi, \quad (18)$$

$$F_3(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) F_2(t, \xi) d\xi \quad (19)$$

тогда уравнение (14) можно записать в виде

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^1 [K_1(t, x, \xi, \tau) v_{\xi}(\tau, \xi) + \\ + K_2(t, x, \xi, \tau) v(\tau, \xi)] d\xi d\tau + m(t, x) \varphi(t) + \\ + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t - s)) m(s, x) \varphi(s) ds + F_3(t, x). \quad (20)$$

Полагая $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$ и учитывая (6) и (4), из (20) имеем

$$\begin{aligned}
 m(t, x_1) \varphi(t) + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh\left(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\right) m(s, x_1) \varphi(s) ds = \\
 = - \int_0^t \int_0^1 [K_1(t, x_1, \xi, \tau) v_\xi(\tau, \xi) + \\
 + K_2(t, x_1, \xi, \tau) v(\tau, \xi)] d\xi d\tau + g''(t) - F_3(t, x_1)
 \end{aligned} \quad (21)$$

Дифференцируя по x , из (20) получим

$$\begin{aligned}
 v_x(t, x) = \int_0^t \int_0^1 [K_{1x}'(t, x, \xi, \tau) v_\xi(\tau, \xi) + \\
 + K_{2x}'(t, x, \xi, \tau) v(\tau, \xi)] d\xi d\tau + m_x'(t, x) \varphi(t) + \\
 + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \int_0^t sh\left(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}(t-s)\right) m_x'(s, x) \varphi(s) ds + F_{3x}'(t, x)
 \end{aligned} \quad (22)$$

Предположим, что

$$m(t, x) = -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x_1, \xi) f(t, \xi) d\xi \neq 0 \quad (23)$$

при всех $t \in [0, T]$.

Таким образом, для определения $\varphi(t)$, $v(t, x)$ и $v_x(t, x)$. Мы получили систему линейных интегральных уравнений Вольтера второго ряда (20), (21) и (22). Тем самым доказано следующий

Теорема. Пусть выполняются условия (5), (23),

$$b_1(t, x), b_2(t, x), f(t, x), F(t, x) \in C(G), u_0(x), u_1(x) \in C^2[0, 1], g(t) \in C^2[0, T].$$

$a_0 > 0, a_1 < 0$. Тогда система (20), (21) и (22) имеет единственное решение $v(t, x), v_x(t, x), \varphi(t)$ в пространстве $C^{0,1}(G) \times C[0, T]$.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $u(t, x), \varphi(t)$ в пространстве $C^{2,2}(G) \times C[0, T]$.

Литература:

1. Asanov A., Atamanov E.R. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations. – Netherlands: VSP, Utrecht, 1997. – 152 p.
2. Асанов А., Атаманов Э.Р. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения. – Сиб. матем. журнал. – 1995. Т.36. № 4. – С.752-762.
3. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 183 с.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
5. Лаврентьев М.М. О некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
6. Матанова К.Б. Обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Труды международной научно-теоретической конференции “Проблемы образования, науки и культуры в начале 21 века”. 2001. Вып. 4. – С. 94-100.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандеров С.