Кокозова А.Ж.

ТЕЛЕГРАФТЫК ТЕҢДЕМЕНИН МАСЕЛЕЛЕРИНИН ПРАКТИКАЛЫК КОЛДОНУУЛАРЫ ЖАНА АЛАРДЫН ЧЕЧИМДЕРИНИН УСУЛДАРЫ

Кокозова А.Ж.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

A.Zh. Kokozova

PRACTICAL APPLICATION PROBLEM TELEGRAPH EQUATION AND METHODS FOR THEIR SOLUTION

УДК: 517.962, 517.956.3

Бул макалада телеграфтык теңдеменин практикалык колдонуштары келтирилген. Бул колдонуулардын көп обзору берилди. Көпчүлүк учурларда ал телеграфтык тендемелердин чыгаруулары келтирилген. Ар бир колдонуулар боюнча телеграфтык теңдеменин баштапкы жана чектик шарттары берилди. Телеграфтык теңдемелердин чечимдерин табуунун усулдары келтирилген.

***Негизги сөздөр:** телеграфтык теңдеме, баштапкы шарттары, чектик шарттары, чечимдердин усулдары.*

В данной статье приведены практические приложения телеграфного уравнения. Дан большой обзор этих приложений. Во многих случаях изложены выводы телеграфного уравнения. Даны начальные и граничные условия телеграфного уравнения по каждым приложениям.

***Ключевые слова:** телеграфное уравнение, начальные условия, граничные условия, методы решения.*

This article describes the practical application of the telegraph equation. Given a great review of these applications. In many cases, it sets out the conclusions of the telegraph equation. Given the initial and boundary conditions of the telegraph equation for each application. Listed methods of solution of the telegraph equation.

***Key words:** telegraph equation, initial conditions, border conditions, methods of solution.*

Введение. Однопроводные кабельные линии используются в электронных системах самолетов, спутников, навигаций судов и т.д. Они подвержены влиянию электронных полей, изучению радарных установок, электромагнитному импульсу. Изучение их представляет большой интерес.

В однопроводной длинной линии электромагнитные поля описываются телеграфными уравнениями.

В многопроводной линии в качестве воздействующего поля может быть произвольное неоднородное поле, которое удовлетворяет уравнение Максвелла. А уравнение Максвелла в упрощенном случае описывает опять же телеграфное уравнение.

В электрической связи телеграфные уравнения бывают: линия без потерь (производной по времени отсутствует), линия с потерями (производной по времени присутствует).

Изучение задачи телеграфного уравнения представляет большой интерес с точки зрения практического приложения, которые приведены в данной статье.

Математическая модель переходных процессов в длинных электрических линиях.

Рассмотрим математическую модель переходных процессов в длинных электрических линиях [1], [2]. Пусть задана длинная электрическая линия с заданным электрическим напряжением $U(t)$ и внутренним сопротивлением R_i, а также нагруженным сопротивлением RH. В этом случае в произвольных режимах напряжения $U(x,t)$ и ток $I(x,t)$ описывается телеграфными уравнениями вида

$$-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = L_0 * \quad \frac{\partial (x,t)}{\partial t} + R_0 I(x,t), \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = C_0 * \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + G_0 U(x,t), \qquad (2)$$

Отметим, что при низком темпе переходных процессов математической модели телеграфного уравнения переходит к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Распространения волн в средах с поглощением энергии описывается также телеграфным уравнением

$$\frac{1}{v^2} U''_{tt} + bU'_t + cU(x,y,z,t) = \Delta U(x,y,z,t) + f(x,y,z,t),$$ Δ- оператор Лапласа.

Электрический ток $I(x,t)$ и напряжение $U(x,t)$ составляют электрические колебания в проводах. Падение электрического напряжения складывается из омического сопротивления и индуктивного коэффициента

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}+I(x,t)+L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}=0. \qquad (3)$$

А разность тока расходуется на зарядку элемента и на утечку через боковую поверхность провода, т.е.

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}+C\qquad\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}+\mathrm{A}U(x,t)=0 \qquad (4)$$

где R и L - сопротивление и коэффициент индуктивности, C - емкость, A-коэффициент утечки.

Последние уравнения (3)-(4) называются телеграфным уравнением.

Уравнении (3), (4) можно привести к уравнению второго порядка зависящей от искомой функции $I(x,t)$ или $U(x,t)$.

Продифференцируем первое уравнение по t , второе уравнение по x

$$CU''_{xt}(x,t)+CI'_t(x,t)+CLI''_{tt}(x,t)=0 \qquad\qquad I''_{xt}(x,t)+CU''_{tx}(x,t)+\mathrm{A}U'_x(x,t)=0$$

Отнимая и подставляя значение $U'_x(x,t)$ получим

$$I''_{xx}(x,t)=CLI''_{tt}(x,t)+(CR+\mathrm{A}L)I'_t(x,t)+R\mathrm{A}I(x,t). \qquad (5)$$

Таким образом можно получить и для $U(x,t)$.

$$U''_{xx}(x,t)=CLU''_{tt}(x,t)+(CR+\mathrm{A}L)U'_t(x,t)+R\mathrm{A}U(x,t). \qquad (6)$$

При $\mathrm{A}=0, R=0$ последние уравнения переходят к волновому уравнению.

Математическая модель диффузионной массы переноса в твердых телах.

В твердых телах процессы диффузионной массы переноса обладают особенностями: эффекты инерционности массы переноса. Уравнения диффузии представляется уравнением вида параболического типа.

Но, уравнения диффузии для статистически неравновесной сплошной среды является уравнением гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}+\frac{1}{\vartheta_j}\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{D}{\vartheta_j}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \qquad (7)$$

и называется телеграфным уравнением и оно описывает процесс волнового переноса массы с конечной скоростью $\nu_j=\sqrt{D/\upsilon_j}$.

Математическую модель (7) можно записать в безразмерном виде

$$\frac{\vartheta_j}{T}\frac{1}{F_0}C''_{\bar t\bar t}(\bar x,\bar t)+\frac{1}{F_0}C'_{\bar t}(\bar x,\bar t)=C''_{\bar x\bar x}(\bar x,\bar t), \qquad (8)$$

где $C=(c-c_{гр})/(c_0-c_{гр})$ - объемные концентрации переносимого компонента текущая, начальная и граничная соответственно, $F_0=DT/L^2$ - диффузионный критерий Фурье, T - время процесса, L - линейный размер, $\bar x,\bar t$ - безразмерные координата и время.

Таким образом время релакции переноса массы в твердых телах соизмеримы с временами проведения диффузии.

Время релаксации в интерметаллических телах измеряется:

- в секундах, в окислении и сульфировании металлов;
- в минутах, в выщелачивании стекол время релаксации.

Волновой механизм молекулярного переноса массы отчетливо проявляется в твердых телах.

Моделирование диффузионных процессов в упругом теле при его поверхностной модификации частицами также описывается телеграфным уравнением (см. раб. [3]).

Опишем эту работу. Вышеизложенный процесс, когда деформации, скорости и ускорения малы, а также поток равномерно распределен по обрабатываемой поверхности, приводится к одномерной модели:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} J, \tag{9}$$

$$J = -D_0 f(C)\frac{\partial C}{\partial x} + B_0 C\frac{\partial \sigma}{\partial x} - t_r\frac{\partial J}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\sigma = E'(\varepsilon - \Delta a(C - C_0)), \tag{12}$$

где C - массовая концентрация, J - поток массы, σ -напряженность, ρ -плотность среды, D_0 - коэффициент самодиффузии, t_r -время релаксации потока массы, функция $f(C)$ - зависит от структуры образующегося в процессе имплантации “раствора”, B_0 есть или B или K, E' есть или E или K, ε - деформация, u - вектор перемещения, B - коэффициент переноса под действием напряжений, K - упругий модуль всестороннего сжатия.

Дифференцируя (11) по координате x, а (12) дифференцируя дважды по времени t и подставляя друг другу, при этом учитывая (9) и (10) получим

$$\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \rho\Delta\alpha\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \tag{13}$$

Дифференцируя (5) по времени t, а (6) по координате x, избавляясь от смешанных производных, получим

$$t_r\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D_0 f(C)\frac{\partial C}{\partial x}\right] - B\frac{\partial}{\partial x}\left[C\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right]. \tag{14}$$

Если параметр B стремится к нулю и $f(C)$ - постоянная, то из уравнения (14) получим телеграфное уравнение.

Математическое моделирование жидкого груза в котле вагона-цистерна также описывается уравнением телеграфного типа [4,5].

При соударении одиночной цистерны с различными скоростями с другим вагоном, действующих на котел влияют продольные колебания жидкого груза.

Математическая модель колеблющейся жидкости в вагон-цистерне построено на основе уравнений теории колебаний мелкой воды.

Предположим, что жидкость в котле вагона-цистерны движется с ускорением a, считаем, что жидкость идеальная, несжимаемая, с плотностью ρ. Обозначим через $h(x,t)$- уровень свободной поверхности жидкости в воздушном состоянии, а h_0 - невозмущенном состоянии жидкости, $u(x,t)$- скорость продольного движения жидкости, g - ускорение свободного падения.

Тогда математическая модель движения жидкости в котле вагона-цистерны описывается уравнением телеграфного типа для $u(x,t)$ и $h(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gh_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gh_0\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - h_0\frac{\partial a}{\partial x}, \tag{16}$$

В резонансных режимах ускорение движений жидкости будет:

$$a = \widetilde{a} - \frac{16\eta}{\rho D^2} u(x,t), \tag{17}$$

где $\widetilde{a}$ - ускорение резонансных режимов движений, η -динамический коэффициент вязкости, D - диаметр котла.

Математическая модель линейных плоских колебаний, взаимодействующей с автоколебательным контуром типа Вандер Поля.

Автоколебательная система, состоящий из однородной возбуждаемой струны с закрепленными концами и резонатора (груз закреплен в середине струны) описывается следующей краевой задачей для телеграфного уравнения [6].

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad t \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{18}$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon\alpha\left(u^2 - 1\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u\right]\Bigg|_{x=1} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}, \tag{19}$$

где $u(x,t)$ - нормированные переменные составляющие напряжения в линии, $\varepsilon = lR\sqrt{C/L}$,l- длина линии, R - сопротивление,C - емкость, L - индуктивность, α, β, γ - коэффициенты.

Телеграфное уравнение также описывает электромагнитные поля в изотропных проводящих средах, когда индуктивный ток мал в сравнении с током проводимости. Рассматривая вектор потенции в проницаемость полях получим математическую модель в виде телеграфного уравнения [7]

$$\frac{\partial^2 \mathrm{A}_x}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_\infty}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial t}, \tag{20}$$

где $\mathrm{A}_ч$-вектор потенциал, ε_∞- диэлектрическая проницаемость среды, c-скорость, σ-электропроводимость.

Последняя формула (20) описывает волновые процессы в диссипативных средах.

Телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{21}$$

описывает изменения потенциала $u(x,t)$в линиях электропередачи, L, C, R, G- параметры самоиндукции, емкость, сопротивление, характеристика потерь на единицы длины линии.

Телеграфное уравнение является математической моделью большого числа физических процессов, например, оно описывает давление нефти и газа в трубопроводе, характеризует динамику силу при распространении электромагнитных волн в длинных линиях, пластовые давления смещения геологической среды.

Телеграфное уравнение позволяет уследить сопротивление среды и выясняет причины затухания волн, вызванного этим сопротивлением. Например в работе [8] построено точное решение на основе метода продолжений и метода интегрального представления для третьей краевой задачи телеграфного уравнения вида в области $0 < x - x_n < l, t > t_n$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(x,t_n) = 0, \qquad u_t(x,t_n) = 0, \qquad x > x_n, \tag{23}$$

$$u_x(x_n,t) + h(x_n,t)u(x_n,t) = k(t - t_n), \qquad t > t_n, \tag{24}$$

где a - скорость в вакууме, D, B, C - коэффициенты.

Уравнение баланса расхода газа в неподвижном слое также описывается телеграфным уравнением

$$\frac{2}{\tau}\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2},$$

где $G(x,t)$ - расход газа в слое, τ - характерное время релаксации, a - скорость звука в газе.

Математическая модель распространения возбуждения электрического импульса по нервным и мышечным волокнам.

В биомедицине также возникают телеграфные уравнения, например, в распространении потенциала действий по нервному волокну (по аксону) [9,10].

Выводим это уравнение. В участке $x=0$ возбуждение нерва приводит к деполяризации нервной мембраны и внутри клеточный потенциал увеличивается от V_0 - потенциал покоя до V - потенциала, при этом протекает ток I_a - в соседнем участке.

Возникновение ионных токов через мембраны нерва математически описывается уравнением Ходжкина-Хакси. Таким образом потенциал зависит от $x,t,$ т.е. $V=V(x,t)$. Обозначим плотность тока J_m и она состоит:

$$J_m=J_R+J_C, \tag{25}$$

где J_R - ток переносом ионов, J_C - емкостный составляющий ток и

$$J_R 2\pi\, dx=\frac{V}{R},\qquad R=\rho_m\frac{l}{2\pi\, dx},\quad \text{отсюда}\quad J_R=\frac{V}{\rho_m l},$$

где ρ_m - удельное сопротивление вещества мембраны, l - толщина мембраны, r - радиус аксона, $2\pi dx$ - площадь мембраны аксона протяжностью dx.

Из уравнения конденсатора следует $\quad J_C=C_m\dfrac{\partial V}{\partial t},$

где C_m - емкость на единицы площади мембраны, $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ - производная потенциала по t.

Тогда формула (25) имеет вид

$$J_m=\frac{V}{\rho_m l}+C_m\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{26}$$

Сила тока в аксоне плазм убывает, т.к. часть тока проходит через мембраны нервов, и убыль дается формулой $\dfrac{\partial I_a}{\partial x}=J_m 2\pi\, r\, dx,$ отсюда

$$J_m=-\frac{1}{2\pi\, r}\frac{\partial I_a}{\partial x}. \tag{27}$$

Неизвестную I_a найдем через разность потенциалов

$$-dx=I_a dR_a=\left|dR_a=\rho\frac{dx}{\pi\, r^2}\right|=I_a\rho_a\frac{dx}{\pi\, r^2}.$$

Откуда $I_a=-\dfrac{\pi\, r^2}{\rho_a}\dfrac{dV}{dx}=-\dfrac{\pi\, r^2}{\rho_a}\dfrac{\partial V}{\partial x}$, ρ_a -удельное сопротивление аксонной плазмы.

Подставляя в (27) значение I_a получим

$$J_m=-\frac{1}{2\pi\, r}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\pi\, r^2}{\rho_a}\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{r}{2\rho_a}\frac{\partial\ V}{\partial x^2}.$$

Последнюю формулу подставляя в (26) получим телеграфное уравнение

$$\frac{r}{2\rho_a}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-C_m\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{V}{\rho_m l}=0. \qquad (28)$$

Если $\frac{\partial V}{\partial t}=0,$ при $t\to\infty$, то получим

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{\lambda^2}V$, где $\lambda=\sqrt{\frac{r\rho_m l}{2\rho_a}}$ - константа длины нервного волокна, а решение $V(x)=V_0e^{-\lambda x}$.

В живых существах хорошо, когда скорость проведения нервного импульса высока. Увеличивать ρ_a трудно, т.к. она почти одинакова у всех животных.

Поэтому здесь λ - увеличивают за счет r или ρ_m или l.

Линеаризованные уравнения неустановившегося движения жидкости представляет собой линейную гиперболическую систему и является частным случаем телеграфных уравнений.

Для исследования неустановившегося движения жидкости в колонне насосно-компрессорных труб необходимо решить классическое уравнение Н.Е.Жуковского для задачи о гидравлическом ударе:

$$-\frac{\partial P}{\partial x}=\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+2a\omega\right),\qquad -\frac{\partial P}{\partial t}=c^2\rho\frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad (29)$$

где P - среднее давление сечения, ρ - плотность жидкости, ω - средняя скрость движения жидкости в сечении, a - коэффициент, зависящий от формы сечения и толщины стенок трубы, x - расстояние от начального до сечения по смоченному периметру, t - время, c - скорость звука в жидкости.

$$\left.\begin{aligned}&\textit{Начальные условия}\quad \omega(x,0)=F_1(x),\quad P(x,0)=F_2(x).\\&\textit{Граничные условия}\quad P(l,t)=\varphi(t),\quad \omega(l,t)+h\frac{\partial\omega(l,t)}{\partial x}=f(t),\end{aligned}\right\}$$

где $F_1(x),F_2(x)$ - заданные функции скорости и давления, $\omega(t)$ - функция давления, создаваемая импульсным устройством на забое скважины, h - постоянная, $f(t)$ - функция, зависящая от расхода жидкости к внутренней площади поперечного сечения колонны труб.

Рассмотрим (29) в самом простом случае, пусть все параметры постоянные. Первое уравнение продифференцируем по t, а второе по x и получим

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial t}=\rho\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+2a\frac{\partial\omega}{\partial t}\right),\qquad -\frac{\partial^2 P}{\partial t\partial x}=c^2\rho\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$$

Отсюда получим телеграфное уравнение

$$c^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+2a\frac{\partial\omega}{\partial t}, \qquad (30)$$

Начальные и граничные условия телеграфного уравнения

В длинных однородных линиях для телеграфного уравнения ставится обычно следующие начальные и граничные условия

$$U(x,t)\big|_{t=0}=f(x),\qquad I(t,x)\big|_{t=0}=g(x),$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{-G}{c}f(x)-\frac{1}{c}g'(x),\qquad \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{-R}{L}g(x)-\frac{1}{L}f'(x),$$

$$U(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_1(t),\quad U(x,t)\big|_{x=l}=\psi_1(t),\quad I(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_2(t),\quad I(x,t)\big|_{x=l}=\psi_2(t).$$

В случае когда при $x=0$ включен источник питания с электродвижущей силой $E(t)$, а в конце $x=l$ имеется приемник тока с сопротивлением R_l, тогда граничные условия будут в виде

$$U(x,t)\big|_{x=0}=E(t),\qquad U(x,t)\big|_{x=l}=R_l I(l,t).$$

В случае когда в конце линии $x=l$ включены $E(t)$, сопротивление R_l и индукция L_l, тогда

$$U(x,t) = \left(E + RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \right)\Big|_{x=l}.$$

Начальные условия для телеграфного уравнения второго порядка, например, для (5), (6), (7), (8), (14) берут следующим образом

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x).$$

Начальное условие это результат измерения $U(x,t)$ при $t = 0$.

$$\psi(x) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t\to\infty} = \lim_{\xi\to 0}\left[\frac{U(x,\xi) - \varphi(x)}{\xi}\right]$$

Процесс при $t < 0$ не существует и он действует начиная с момента $t = 0$ и $\varphi(x)$ - измеряется в этот момент. $\psi(x)$ - является интенсивность процесса и он зависит от $\varphi(x)$ и от параметров уравнения. Граничные условия задаются при $x = 0$ и при $x = l$.

$$U(0,t) = f(t), \qquad U(l,t) = g(t).$$

Методы решения задач телеграфного уравнения

В случае, когда линия не является без потерь и без искажений, то решение задачи телеграфного уравнения усложняются. В таких случаях используют операционные методы, прямые и обратные преобразования Лапласа.

Если уравнения приводятся к линейному дифференциальному уравнению типа Бесселя II порядка, то при решении задачи используют функции Бесселя.

Для решения задачи телеграфного уравнения существует аналитические (точные) методы и численные (приближенные методы).

Аналитические методы, когда решение задачи получается с помощью различных математических преобразований. Но аналитические решения можно получить в не очень сложных, простых случаях. Но, как Вы знаете в жизни, объекты сложны, нелинейны, многофазны.

В таких случаях решают численными методами. Методы решения задачи телеграфного уравнения: метод разделения переменных, метод Римана, метод волновых, каналов, фазный метод, метод характеристик и т.д.

Численные методы: разностные методы, методы соток, конечных элементов, граничных элементов, метод Монте-Карло, итерационные методы, проекционный метод.

Эти методы применяются по следующим ситуациям: виды уравнения, начальные условия, граничные условия и т.д.

Заключение. Изучение, исследования задач телеграфного уравнения представляет интерес с точки зрения практического приложения. В каждом приложении телеграфного уравнения свои особенности и единый подход не является возможным. Тем более эти приложения описывают различные процессы, явления.

Литература:

1. Голоскоков Д.П. Уравнение математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004, -539с.
2. Маликов Р.Ф. Практикум по компьютерному моделированию физических явлений и объектов. Учебное пособие. Уфа, 2005. -291с.
3. Ильина Е.С., Демидов В.Н., Князева А.Г. Особенности моделирования диффузионных процессов в упругом теле при его поверхностной модификации частицами// Вестник ПНИПУ, 2012, Механика, №3, стр.25-49.
4. Богачев В.И. Моделирование процесса развития внутреннего давления в котле цистерны и напряженного состояния днище при маневровом соударении. Дисс. на соискание ученой степени к.т.н., Москва, 2014, -174с.
5. Беспалко С.В. Разработка и анализ моделей повреждающих воздействий на котлы цистерн для перевозки криогенных продуктов. Дисс. на соискание д.т.н., Москва, 2000. -427с.
6. Розов Н.Х. Феномен буферности в математических моделях естествознания. Вестник Удмуртского университета. Математика, 2010. Вып.3, с. 58-63.
7. Шварцбург. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах. Успехи физических наук. Январь 1988, том 168, №1. с. 85-103.
8. Остапенко В.А. Третья краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области. Вестник ДНУ, Серия “Моделирование”. №8. 2011. Вып.3. с. 74-77.
9. Новиков Д.А., Филимонов М.М. Биофизика. Часть1. Минск: БГУ, 2008, -186с.
10. Владимиров Ю.А. Биофизика. М.: Медицина, 1983.-272с.
11. Хабибуллин М.Я., Арсланова И.Г. Параметры неустановившегося движения закачиваемой жидкости в колоне насосно-компрессорных труб при работе импульсных устройств. Нефтегазовое дело. Электронный научный журнал. 2014. №1, 148-154 с. www. ogbus.ru

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.