ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICS

Сатыбаев А.Дж., Алимканов А.А.

ӨТӨ ТЕЗ БУЛАКТУУ СЕЙСМИКАНЫН ЭКИЛИК ТҮЗ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН ЖАШООСУНУН ДАЛИЛДӨӨСҮ

Сатыбаев А.Дж., Алимканов А.А.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ

A.Dj. Satybaev, A.A. Alimkanov

PROOF OF THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL SEISMIC PROBLEM DIRECT WITH INSTANTANEOUS SOURCE

УДК: 519.633:550.34

Бул макалада бат берилүүчү булактуу сейсмиканын экилик түз маселесинин чечиминин жашоосу далилденген.
Негизги сөздөр: *экилик, түз маселе, бат берилүүчү булак, чечим жашоосу.*

В данной статье приведены доказательства существования решения двумерной прямой задачи с мгновенным источником.
Ключевые слова: *двумерная, прямая задача, мгновенный источник, существование.*

This article carried out the proof of the existence of two-dimensional solutions of the direct problem with instant source.
Key words: *two-dimensional, direct problem, the existence of a solution, an instant source of existence.*

Таким же образом [см. предыдущую статью авторов] можно показать, что справедливость неравенство

$$\max_{|\alpha| \le t \le T} \int_{-D}^{D} \int_{-t}^{t} \tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha, y, (k+1)\tau) d\alpha dy \le \max_{|i| \le k \le M} \frac{h_1 h_2}{2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=N}^{N} \left[\frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_1} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij+1}^{k}}{h_1} \right]^2 \le B_2.$$

Покажем линейность функции $\tilde{u}_{\alpha}(\alpha, y, t)$. Пусть t:

$$k\tau < t < (k+1)\tau,\ ih_1 < \alpha < (i+1)h_1,\ \ jh_2 < y < (j+1)h_2$$

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha, y, (k+1)\tau) = -u_{ij}^{k+1} \frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2} \right) + u_{i+1j}^{k+1} \frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2} \right) -$$

$$-u_{ij+1}^{k+1} \frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2} - j \right) + u_{i+1j+1}^{k+1} \frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2} - j \right);$$

$$\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, k\tau) = -u_{ij}^k \frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right) + u_{i+1j}^k \frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right) -$$

$$-u_{ij+1}^k \frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right) + u_{i+1j+1}^k \frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right).$$

Отсюда следует:

$$\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, t) = \left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, k\tau) + \left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, (k+1)\tau) = \tag{24}$$

$$= \left(1-\frac{t-\tau k}{\tau}\right)\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, k\tau) - \left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, (k+1)\tau).$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, t)$ линейная функция.

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} u_\alpha^2(\alpha, y, t)\,d\alpha dy \le \left(1-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\right)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} \tilde{u}_\alpha^2(\alpha, y, k\tau)\,d\alpha dy +$$

$$+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} \tilde{u}_\alpha^2(\alpha, y, (k+1)\tau)\,d\alpha dy \le$$

$$\le \left(1-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\right)\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} \tilde{u}_\alpha^2(\alpha, y, \tau k)\,d\alpha dy + \left(\frac{t}{\tau}-k\right) *$$

$$* \max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} u_\alpha^2(\alpha, y, (k+1)\tau)\,d\alpha dy \le \max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} \tilde{u}_\alpha^2(\alpha, y, \tau k)\,d\alpha dy \le$$

$$\le \max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1 h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_1}+\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k+1}}{h_1}\right]^2 \le B_2.$$

Что и требовалось доказать. Докажем, что

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} \tilde{u}_y^2(\alpha, y, t)\,d\alpha dy \le B_3, \text{ если } \max_{|i|\le k\le M} h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right]^2 < B_3$$

$$\tilde{u}_y(\alpha, y, t) = \left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2} + \left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_2} +$$

$$+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2} + \left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j}^{k+1}}{h_2};$$

$$\tilde{u}_y(\alpha, y, k\tau) = \left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2} + \left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2};$$

$$\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\tilde{u}_y^2(\alpha, y, k\tau)d\alpha dy = \int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^k - u_{ij}^k}{h_2} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{i+1j}^k}{h_2}\right]^2 d\alpha dy = \left|\begin{matrix}\eta = \dfrac{y}{h_2} - j,\ h_2 d\eta = dy \\ \xi = \dfrac{\alpha}{h_1} - i,\ h_1 d\xi = d\alpha\end{matrix}\right| =$$

$$= h_1 h_2 \int_0^1 \left[(1-\xi)\frac{u_{ij+1}^k - u_{ij}^k}{h_2} + \xi\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{i+1j}^k}{h_2}\right]^2 d\xi = \left| c_2 = \frac{u_{ij+1}^k - u_{ij}^k}{h_2} \quad d_2 = \frac{u_{i+1j+1}^k - u_{i+1j}^k}{h_2}\right| =$$

$$= h_1 h_2\left[\frac{1}{3}c_2^2 + 2c_2 d_2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] + \frac{1}{3}d_2^2\right] \le \frac{h_1 h_2}{2}\left(c_2^2 + d_2^2\right) = \frac{h_1 h_2}{2}\cdot\left[\left(\frac{u_{ij+1}^k - u_{ij}^k}{h_2}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{i+1j}^k}{h_2}\right)^2\right].$$

Суммируя последнее при $i = \overline{N, N}$; $\qquad j = -\overline{L, L}$

$$\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha, y, k\tau)d\alpha dy \le \max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1 h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\left(\frac{u_{ij+1}^k - u_{ij}^k}{h_2}\right)^2 +\right. \tag{25}$$

$$\left.+\left(\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{i+1j}^k}{h_2}\right)^2\right] \le B_3;$$

Такое же неравенство можно установить и для

$$\max_{i\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha, y, (k+1)\tau)d\alpha dy \le B_3.$$

Рассмотрим в параллелепипеде $k\tau<t<(k+1)$, $ih<\alpha<(i+1)h_1$, $jh_2<y<(j+1)h_2$ следующую функцию $\tilde{u}_y(\alpha, y, (k+1)\tau) = \left(i+1-\dfrac{\alpha}{h_1}\right) * \dfrac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_2} + \left(\dfrac{\alpha}{h_1} - i\right)\dfrac{u_{i+1j+1}^{k+1} - u_{i+1j}^{k+1}}{h_2}$.

Отсюда

$$\tilde u_y(\alpha,y,t)=\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\tilde u_y(\alpha,y,k\tau)+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde u_\alpha(\alpha,y,(k+1)\tau). \quad (26)$$

Что и показывает линейность функции $\tilde u_y(\alpha,y,t)$

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde u_y^2(\alpha,y,t)dady=(1-(\frac{t}{\tau}-k))\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde u_y^2(\alpha,y,k\tau)dady+(\frac{t}{\tau}-k)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde u_y^2(\alpha,y,(k+1)\tau)dady\le$$

$$\le\left[1-(\frac{t}{\tau}+k)+\frac{t}{\tau}+k\right]\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde u^2(\alpha,y,k\tau)dady\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right]^2\le B_3.$$

Таким образом показали ограниченность и линейность кусочно-непрерывных функций $\tilde u(\alpha,y,t),\tilde u_t(\alpha,y,t),\tilde u_\alpha(\alpha,y,t),\tilde u_y(\alpha,y,t).$

Покажем теперь существование следующих членов $\frac{\partial\tilde u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha},\frac{\partial\tilde u(\alpha,y,t)}{\partial t},\frac{\partial\tilde u(\alpha,y,t)}{\partial y}$, т.е. можно выбрать сходящейся подпоследовательность функций $\{U_{ij}^k\},\{W_{ij}^k\},\{V_{ij}^k\}$, которые сходятся к вышеуказанным членам.

Обозначим через $v_{ij}^k=\dfrac{u_{i+1j}^k-u_{ij}^k}{h_1}$. Пусть выполнены (16) и а также для (v_{ij}^k) выполнено условии (16), т.е.

$$\left.\begin{cases}\max h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}(v_{ij}^k)^2\le A; & \max h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{v_{ij}^k-v_{ij}^k}{\tau}\right)^2\le B_1\\ \max h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{v_{i+1j}^k-v_{ij}^k}{h_1}\right)^2\le B_2; & \max h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{v_{ij+1}^k-v_{ij}^k}{h_2}\right)^2\le B_3.\end{cases}\right\} \quad (27)$$

Докажем, что справедливо $v(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\tilde u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}$. Пусть $\alpha_2>\alpha_1$

$$\tilde u(\alpha_2,y,t)-\tilde u(\alpha_1,y,t)=\tilde u\left(\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)-\tilde u\left(\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=$$

$$=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}\frac{u_{i+1j}^k-u_{ij}^k}{h_1}*h_1+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}v_{ij}^kh_1+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=$$

$$= \sum_{i=\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1} \int_{ih_1}^{(i+1)h_1} v(\alpha, y, k\tau)d\alpha + O\left(|\alpha_2-\alpha_1|\sqrt{h_1}\right) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha, y, k\tau)d\alpha +$$

$$+O\left(|\alpha_2-\alpha_1|\sqrt{|t-k\tau/}\right) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha,y,t)d\alpha + O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right). \tag{28}$$

Отсюда при $h_1 \to 0,\ h_2 \to 0,\ \tau \to 0$ имеем

$$\tilde{u}(\alpha_2, y, t) - \tilde{u}(\alpha_1, y, t) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha, y, t)d\alpha. \tag{29}$$

Дифференцируя последнюю формулу, получим $v(\alpha,y,t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial \alpha}$. Обозначим через $W_{ij}^{k} = \dfrac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau}$. Пусть для W_{ij}^{k} выполнены неравенство вида (27). Покажем, что справедливо равенство $W(\alpha,y,t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial t}$.

$$\tilde{u}(\alpha,y,t_2) - \tilde{u}(\alpha,y,t_1) = \tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right) - \tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right) +$$

$$+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right) = \sum_{k=\left[\frac{t_2}{\tau}\right]+1}^{\left[\frac{t_1}{\tau}\right]-1} \frac{\tilde{u}_{ij}^{k+1} - \tilde{u}_{ij}^{k}}{\tau} * \tau + O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right) \tag{30}$$

Также как и выше рассуждая

$$\tilde{u}(\alpha, y, t_2) - \tilde{u}(\alpha, y, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} W(\alpha, y, t)dt. \tag{31}$$

Дифференцируя формулу (31) получим $W(\alpha, y, t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha, y, t)}{\partial t}$.

Обозначим через $V_{ij}^{k} = \dfrac{u_{ij+1}^{k} - u_{ij}^{k}}{h_2}$. Пусть для V_{ij}^{k} также выполнены неравенства вида (27).

Покажем что $V(\alpha, y, t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$. $\tilde{u}(\alpha,y_2,t) - \tilde{u}(\alpha,y_1,t) = \tilde{u}\left(\left[\dfrac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\dfrac{y_2}{h_2}\right]h_2, \left[\dfrac{t}{\tau}\right]\tau\right) -$

$$-\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_1}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{y=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]}\frac{\tilde{u}_{ij+1}^{k}-\tilde{u}_{ij}^{k}}{h_2}h_2+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right). \tag{32}$$

Следовательно

$$V(\alpha,y,t)=\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}. \tag{33}$$

Таким образом, можно выбрать сходящиеся подпоследовательность сеточных функций $\left\{u_{ij}^{k}\right\},\left\{U_{ij}^{k}\right\},\left\{W_{ij}^{k}\right\},\left\{V_{ij}^{k}\right\}$ которые сходятся к функциям u, U, W, V следовательно к функциям $u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\tau},\frac{\partial u}{\partial y}$.

Покажем теперь существование следующих производных

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial y}$. Ñóùåñòâîâàíèÿ ïðîèçâîäíûõ $\frac{\partial u}{\partial\alpha},\ \frac{\partial u}{\partial y}$ äîêàçàíû. Îáîçíà÷èì ÷åðåç $\nu_{2ij}^{k}=\frac{\nu_{i+1j}-\nu_{ij}^{k}}{h_1}$. Ïóñòü âûïîëíåíû

$$\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\nu_{2ij}^{k}\right)^2\le A,\quad \max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\nu_{2ij}^{k+1}-\nu_{2ij}^{k}\right)^2\le B_1,$$

$$\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum\left(\frac{\nu_{2i+1j}^{k}-\nu_{2ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\quad \max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{\nu_{2ij+1}^{k}-\nu_{2ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3. \tag{34}$$

$$\tilde{\nu}(\alpha,y_2,t)-\tilde{\nu}(\alpha,y_1,t)=\tilde{\nu}\left(\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)-\tilde{\nu}\left(\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+$$

$$+O(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau})=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}\frac{\nu_{i+ij}^{\;k}-\nu_{ij}^{\;k}}{h_1}+O(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau})=$$

$$=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}\nu_{2ij}^{\;k}h_1+O(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}).$$

Проинтегрируем от ih_1 до $(i+1)h_1$, тогда

$$\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]} \int_{ih_1}^{(i+1)h_1} v_2(\alpha,y,k\tau)d\alpha + O\left(\left|\alpha_2-\alpha_1\right| * \sqrt{h_1}\right) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha,y,k\tau)d\alpha + O\left(\left|\alpha_2-\alpha_1\right|\right) + O\left(\sqrt{h_2}\right) +$$

$+O\left(\left|\alpha_2-\alpha_1\right|\right)\sqrt{(t-k\tau)}$. Следовательно $v(\alpha_2,y,t,)-v(\alpha_1,y,t,)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_2(\alpha,y,t)+O\left(\sqrt{h_1,h_2,\tau}\right)$.

Дифференцируя последнее, получим $v_2(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial v(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha^2}$.

Таким же образом можно показать

$$W_2(\alpha,y,t)=\frac{\partial W(\alpha,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial t^2};\ V_2(\alpha,y,t)=\frac{\partial V(\alpha,y,t)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial y^2}.$$

Покажем существование производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial y}$.

Обозначим $P_{2ij}^k=\dfrac{U_{ij+1}^k-U_{ij}^k}{h_2}$. Пусть выполнены

$$\begin{cases} \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(P_{2ij}^k\right)^2\le A, \quad \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{P_{2i+j}^k-P_{2ij}^k}{h_1}\right)^2\le B_2, \\ \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{P_{ij}^{k+1}-P_{ij}^k}{\tau}\right)^2\le B_1, \quad \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{P_{ij+1}^{k+1}-P_{ij}^k}{h_2}\right)^2\le B_3. \end{cases} \tag{35}$$

$$v\left(\alpha,y_2,t\right)-v\left(\alpha,y_1,t\right)=\tilde v\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_2}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)-\tilde v\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_1}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=$$

$$\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1}\frac{v_{ij+1}^k-v_{ij}^k}{h_2}h_2+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1}P_{2ij}^k h_2+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right).$$

Проинтегрируем от jh_2 до $(j+1)h_2$, тогда

$$\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} \int_{ih_2}^{(j+1)h_2} P_2(\alpha, y, k\tau)dy + O\left(\left|y_2 - y_1\right|\sqrt{h_2}\right) =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} P_2(\alpha, y, k\tau)dy + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\right) + O\left(\sqrt{h_2}\right) + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\xi\sqrt{t - k\tau}\right).$$

Отсюда следует

$$v\left(\alpha, y_2, t\right) - v\left(\alpha, y_1, t\right) = \int_{y_1}^{y_2} P_2(\alpha, y, t)dy + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\sqrt{t - k\tau}\right).$$

При $h_1 \to 0,\ h_2 \to 0,\quad \tau \to 0$ продифференцируем последнее равенство по y

$$P_2(\alpha, y, t) = \frac{\partial v(\alpha, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(\alpha, y, t)}{\partial \alpha \partial y}, \text{ и т.д.}$$

Пусть шаги τ, h_1, h_2, по t, α, y пробегают некоторые числовые последовательности

$$\{\tau_s\}, \{h_{1s}\}, \{h_{2s}\}, \quad где\ (\tau_s, h_{1s}, h_{2s}) > 0\ и\ \lim_{s \to \infty} (\tau_s, h_{1s}, h_{2s}) \to 0.$$

Пусть для каждой s построены конечно-разностные решения задачи (10).

Тогда учитывая, что все эти решения вне характеристического угла равны нулю, то существует последовательность $\left\{(u_{i,j}^k)^s\right\}$, для некоторой $u_{i,j}^k$ слабо сходится в норме $W_2^1(\Omega(T, D))$ и сильно сходится в норме $L_2(\Omega(T, D))$ к функции $u(\alpha, y, t)$, т.е.

$$\left\|u_{i,j}^k - u(\alpha, y, t)\right\|_{W_2(\Omega(T,D))} \xrightarrow{слабо} 0, \quad \left\|u_{i,j}^k - u(\alpha, y, t)\right\|_{L_2(\Omega(T,D))} \xrightarrow{сильно} 0. \quad (36)$$

Покажем, что функция $u(\alpha, y, t)$ есть обобщенное решение задачи (10), т.е. справедливость равенство (*). Для u_{ij}^k справедливо равенство

$$\tau h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \sum_{k=|i|}^{M} \left\{\left[(u_{i,j}^k)_{\bar{t}t}^s - (u_{i,j}^k)_{\bar{\alpha}\alpha}^s - L(u_{i,j}^k)^s\right] \cdot \Phi_{ij}^k\right\} = 0. \qquad (37)$$

Используя формулу «суммирование по частям» и «дифференцирование» произведений преобразуем каждый член последнего равенства (для краткости индекс s опускаем)

$$\sum_{k=|i|}^{M}(u_{i,j}^{k})_{t\bar{t}}\cdot\Phi_{i,j}^{k}=-\sum_{k=|i|}^{M}(u_{i,j}^{k})_{t}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{t}}(k)+(u_{i,j}^{k})_{t}(M)(\Phi_{i,j}^{k})(M)-(u_{i,j}^{k})_{t}(|i|)(\Phi_{i,j}^{k})|i|;$$

$$\sum_{k=|i|}^{M}(u_{i,j}^{k})_{\alpha\bar{\alpha}}\cdot\Phi_{i,j}^{k}=\sum_{k=|i|}^{M}\left[((u_{i,j}^{k})_{\bar{\alpha}}\cdot\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}-(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}\right]=$$

$$=-\sum_{k=|i|}^{M}\left\{\left[(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{\alpha}}+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(M)\cdot\Phi_{i,j}^{k}(M)-(u_{i,j}^{k})(|i|)\cdot\Phi_{i,j}^{k}(|i|)\right]_{\alpha}-\right.$$

$$\left.-(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}\right\}=-\sum_{k=|i|}^{M}\left[(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{\alpha}}+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})(i+1)(k)\ \right]+$$

$$+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(M)\Phi_{i,j}^{k}(M)-(u_{i,j}^{k})(|i|)\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}(|i|).$$

$$\sum_{k=|i|}^{M}\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}u_{y\bar{y}}\cdot\Phi_{i,j}^{k}=-\sum_{k=|i|}^{M}\left[\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}(u_{i,j}^{k})_{\bar{y}}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{y}-\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}(u_{i,j}^{k})_{\bar{y}}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{y}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\right)_{y}(u_{i,j}^{k})_{\bar{y}}\Phi_{i,j}^{k}\right]\cdot(k)=-\sum_{k=|i|}^{M}\left[\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}u_{i,j}^{k}\Phi_{i,j}^{k}+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}(D)u_{i,j}^{k}(D)(\Phi_{i,j}^{k})(D)-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}(-D)(u_{i,j}^{k})(-D)\Phi_{i,j}^{k}(-D)\right]_{y}+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}(u_{i,j}^{k})_{y}(\Phi_{i,j}^{k})_{y}+\left(\frac{\mu_{ij,y}}{\rho_{ij}}\right)_{y}(u_{i,j}^{k})_{\bar{y}}\Phi_{i,j}^{k}=$$

$$=-\sum_{k=|i|}^{M}\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{y}\left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y}+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{y}\Phi_{ij}^{k}(i+1);\qquad\sum_{k=|i|}^{M}\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\,u_{\overline{\alpha y}}\cdot\Phi_{ij}^{k}=$$

$$=-\sum_{k=|i|}^{M}\left\{\left[\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\left(\Phi_{ij}^{k}\right)\right]_{y}-\frac{\mu_{ij,y}}{\rho_{ij,y}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}-\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{y\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}-\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\cdot\left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y}\right\}(k)$$

$$=-\sum_{k=|i|}^{M}\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y}+\left(\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\right)_{y}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}(j+1)\quad. \tag{38}$$

Тогда формула (37) будет

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L}^{L}\ \sum_{i=-N}^{N}\sum_{k=|i|}^{M}\left[(u_{i,j}^{k})_{t}(\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{t}}+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}(u_{i,j}^{k})_{y}(\Phi_{i,j}^{k})_{y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{y}(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})_{y}\right]+\left[(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})(i+1)+\frac{\mu_{ij,y}}{\rho_{ij,y}}(u_{i,j}^{k})_{y}(\Phi_{i,j}^{k})(i+1)+\right.$$

$$+\left(\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\right)_y (u_{i,j}^k)_\alpha \Phi_{ij}^k(j+1)+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\Delta\alpha_{i,j}(u_{i,j}^k)_\alpha \Phi_{ij}^k(j+1)+\frac{\mu_{i,j,\bar{\alpha}}}{\rho_{i,j}}\alpha_{\bar{y}}(u_{i,j}^k)_y \Phi_{i,j}^k+$$

$$+\frac{\mu_{i,j,\bar{y}}}{\rho_{i,j}}\alpha_{\bar{y}}(u_{i,j}^k)_\alpha \Phi_{i,j}^k+\frac{\mu_{i,j,\bar{y}}}{\rho_{i,j}}u_{\bar{y}}\Phi_{i,j}^k\Bigg](k)+$$

$$+h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[(u_{i,j}^k)_t(M)\Phi_{i,j}^k(M)-(u_{i,j}^k)_t(|i|)\Phi_{i,j}^k(|i|)+(u_{i,j}^k)_\alpha(M)\Phi_{i,j}^k(M)-(u_{i,j}^k)_\alpha(|i|)\Phi_{i,j}^k(|i|)\right]=$$

$$=\tau h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}S_{i,j}\Phi_{i,j}^i, \qquad k=|i|,\quad M. \tag{39}$$

Переходя к пределу, при $\tau\to 0, h_1\to 0, h_2\to 0$, получим

$$\int_0^t\int_{-D}^{D}\int_{|\alpha|}^{t}\Bigg[\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_\tau\left(\tilde{\Phi}_{ij}^k\right)_\tau+\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_\alpha\left(\tilde{\Phi}_{ij}^k\right)_\alpha+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_y\left(\tilde{\Phi}_{ij}^k\right)_y+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\alpha_y\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_\alpha\tilde{\Phi}_{ij}^k+$$

$$+\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\Delta\alpha_{ij}\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_{\bar{\alpha}}\cdot\tilde{\Phi}_{ij}^k+\frac{\left(\mu_{ij}\right)_{\bar{\alpha}}}{\rho_{ij}}\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_\alpha\tilde{\Phi}_{ij}^k+\frac{\left(\mu_{ij}\right)_{\bar{\alpha}}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_{\bar{y}}\tilde{\Phi}_{ij}^k+$$

$$-\frac{\left(\mu_{ij}\right)_{\bar{y}}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_{\bar{\alpha}}\tilde{\Phi}_{ij}^k+\frac{\left(\mu_{ij}\right)_{\bar{y}}}{\rho_{ij}}\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_{\bar{y}}\cdot\tilde{\Phi}_{ij}^k\Bigg]d\alpha\, dy\, d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\tilde{S}_{ij}\tilde{\Phi}_{ij}^i\, d\tau dy,\ t\in(0,T) \tag{40}$$

где функции волнистой черточкой наверху обозначены кусочно-непрерывные функции, совпадающей с соответствующей функцией в узлах сетки. Так как все эти кусочно-непрерывные функции сходятся к соответствующему функцию, а также учитывая, что $\left(\tilde{u}_{ij}^k\right),\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_t,\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_\alpha,\left(\tilde{u}_{ij}^k\right)_y$ сходятся слабо к функциям $u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Тогда переходя к пределу, получим обобщенное решение (*). Таким образом, доказана теорема

Теорема. Пусть выполнены условия (4)-(5),(16),(27),(34),(35) и функция $u(\alpha,y,t)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка в $\Omega(T,D)$ и пусть $S(t,y)\in L_2(\Omega(T,D))$. Тогда существует обобщенное решение задачи (3) в пространстве $W_2^1(\Omega(T,D))$.

Заключение. Доказана теорема существования решения двумерной прямой задачи сейсмики с мгновенным источником.

Замечание. Доказательства теоремы можно провести, когда условие (3) имеет следующий вид

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2} r(y)\delta(t) + h(y)\theta(t), \quad y \in (-D, D), \tag{3'}$$

Тогда $S(0, y) = -\frac{1}{2} r(y) \frac{\mu(0, y)}{\rho(0, y)}, \qquad R(0, y) = h(y) \frac{\mu(0, y)}{\rho(0, y)}, \qquad y \in (-D, D),.$

Условия (3') называется мгновенным и шнуровым источником.

Литература:

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – Москва: Наука, 1984. - 264 с.
2. Кабанихин С.И. Проекционно - разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение,1988. -168с.
3. Сатыбаев А. Дж., Мирсайитова М.Э. Обратная задача акустики с плоской границей// Наука. Образование. Техника./Международный научный журнал №2(4) . Ош, 2000. -С. 101-104.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: СНО. 2009. С.457.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.