Анищенко Ю.В., Сатыбаев А.Дж.

БАЧЫМ ЖАНА ШНУРДУК БУЛАКТУУ ГЕОЭЛЕКТРИКАНЫН ЭКИЛИК ТҮЗ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН ЖАЛГЫЗДЫГЫ

Анищенко Ю.В., Сатыбаев А.Дж.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКАМИ

Yu.V. Anishenko, A.Dj. Satybaev

UNIQUENESS OF SOLVING TWO-DIMENSIONAL GEOELECTRIC DIRECT PROBLEMS WITH INSTANT AND CORDED SOURCES

УДК: 517.962.2, 517.956.3

Бул макалада геоэлектриканын экилик түз маселеси каралган. Маселенин корректүүлүгү үч шарттан турат: маселенин чечими жашайт, маселенин чечими жалгыз, маселенин чечими туруктуу. Макалада корректүүлүктүн экинчи шарты тастыкталган, маселенин чечиминин жалгыздык теоремасы далилденген.

Негизги сөздөр: *математикалык модель, экилик, түз маселе, геоэлектрика, чечим, жалгыздык.*

В статье рассматривается двумерная прямая задача геоэлектрики. Корректность задачи состоит из трех условий: решение задачи существует, решение задачи единственно и решение задачи устойчиво. Здесь обосновано второе условие корректности, доказана теорема единственности решения задачи.

Ключевые слова: *математическая модель, двумерная, прямая задача, геоэлектрика, решение, единственность.*

The article deals with two-dimensional geoelectric direct problem. Correctness of the problem consists of three conditions: there is a solution to the problem, the only solution to the problem and solving the problem of stability.

It justified the correctness of the second condition, the theorem of uniqueness of solution of the problem.

Key words: *a mathematical model, two-dimensional, direct problem, geoelectrics solution uniqueness.*

Введение. Распространения электромагнитных волн в однородных и неоднородных средах описываются математической моделью, которая выражается системой уравнений Максвелла. Система уравнений Максвелла возникает в практических приложениях электромагниторазведки.

Магниторазведка основана на исследовании земного магнитного поля и магнитных свойств среды.

Известно, что магнитное поле появляется при взаимодействии электрически заряженных частиц и обнаруживается по его действию на проводники с током и магнитные стрелки.

А электроразведка основана на изучении электрических полей в земных недрах. Электро- и магниторазведка тесно связаны друг с другом и характер электромагнитных полей определяется геоэлектрическим строением Земли.

Уравнение Максвелла получаются усреднением микроскопических уравнений поля и определяются на основе изучения механизма взаимодействия электромагнитных полей с атомами и молекулами. В зависимости от исследуемых сред (для линейных и нелинейных) уравнение Максвелла имеет различные виды.

Численные моделирования электромагнитных полей в трехмерных средах и методы решения прямых задач рассмотрены в работах [1, 2].

В работах [3-5] разработаны конечно-разностный метод и метод конечных элементов для решения задачи системы уравнений Максвелла и геоэлектрики, даны численные алгоритмы решения и их реализация.

Численное решение прямой электромагнитной задачи для неоднородной среды методом неортогональных криволинейных координат и их алгоритм изучен в работе [6].

Обратные задачи геоэлектрики, математические постановки, одномерные и многомерные обратные задачи и их фундаментальные и численные решения подробно описаны в монографии [7].

Общий алгоритм решения прямых и обратных задач электродинамики с использованием импульсных полей в электромагнитной разведке исследованы [8].

Постановка задачи.

Рассмотрим модельную задачу геоэлектрики следующего вида

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\varepsilon}(z,y)\bar{\mu}(z,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\bar{\sigma}(z,y)\bar{\mu}(z,y)\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta_{z,y}u(z,y,t)-\\ -\nabla_{z,y}\ln\bar{\mu}(z,y)\nabla_{z,y}u(z,y,t),\quad t\in R_+,\ z\in R_+,\ y\in R,\\ \quad u(z,y,t)\,|_{t<0}\equiv 0,\qquad z\in R_+,\qquad y\in R,\\ \dfrac{\partial u(z,y,t)}{\partial z}\,|_{z=0}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t),\qquad t\in(0,T),\qquad y\in(-D,D),\end{array}\right\} \tag{1}$$

где $\bar{\varepsilon}(z,y)$ - диэлектрическая проницаемость, $\bar{\mu}(z,y)$ - магнитная проницаемость, $\bar{\sigma}(z,y)$ - электропроводимость среды, $u(z,y,t)$ - напряженность электромагнитного поля, $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ - тета-функция Хевисайда.

Начальное условие является следующего характера: до времени $t=0$ среда находилась в покое, а в момент времени $t=0$ на границы действуют источники вида второго условия задачи (1) и начинается электромагнитный процесс.

Граничное условие моделирует (1), так называемую, плоскую границу и шнуровой источник z относительно физических параметров уравнения $\bar{\varepsilon}(z,y),\bar{\mu}(z,y),\bar{\sigma}(z,y)$ и источников $h(y),r(y)$. Предположим, что выполнены

$$\bar{\varepsilon}(z,y),\qquad \bar{\mu}(z,y),\qquad \bar{\sigma}(z,y)\in\Lambda_1, \tag{2}$$

$$h(y),r(y)\in\Lambda_2. \tag{3}$$

$$\Lambda_1=\left\{\begin{array}{l}\varepsilon(z,y)\in C^6((0,d)\times(-D_1,D_1)),\ supu\{\varepsilon(z,y)\}\subset((0,d)\times(-D_1,D_1)),\\ a=\|\varepsilon(z,y)\|_{C^2((0,d)\times(-D_1,D_1))},\quad a\langle\langle\ M_1\end{array}\right\},$$

$$\Lambda_2=\{sup\,p\,h(y)\in(-D,D),h(y)\in C^5(-D,D)\},\ \ 0<M_1,M_2,M_3,D_1,d=const\,.$$

$$D=D_1+T(M_2+a),\ T=2d/(M_1-a)$$

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и (3), то существует решение прямой задачи (1) и имеет производные до четвертого порядка включительно в области регулярности

$$\Omega(T,D)=\{(z,y,t):z\in(-T,T),\ y\in(-D,D),\quad |z|<t<T\}..$$

Доказательство теоремы можно найти в [9].

Сведение задачи (1) к регулярной задаче с данными на характеристиках.

Введем новую переменную являющуюся решением задачи Эйконала следующего вида:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_z^2(z,y)+\alpha_y^2(z,y)=\bar{\varepsilon}(z,y)\cdot\bar{\mu}(z,y),\\ \alpha(z,y)\Big|_{z=0}=0,\qquad \alpha_z\Big|_{z=0}=\bar{\varepsilon}(0,y)\cdot\bar{\mu}(0,y),\end{array}\right\} \tag{4}$$

и введем новые функции

$$\mu(\alpha,y)=\bar{\mu}(z,y),\qquad \varepsilon(\alpha,y)=\bar{\varepsilon}(z,y),\ \sigma(\alpha,y)=\bar{\sigma}(z,y),\qquad \vartheta(\alpha,y,t)=u(z,y,t)\,.$$

Относительно функции $\alpha(z,y)$ пусть выполнены условия:

$$\alpha(z,y)>0,\qquad \lim\alpha(z,y)=\infty\qquad z\to\infty,y\in(-D,D).$$

После продолжения все функции по z на R_- четным образом, задача (1) в терминах новых функций имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2}+L_1\vartheta(\alpha,y,t), \quad |\alpha|<t<T, \qquad y\in(-D,D),\\
&\vartheta\,|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\,|_{t=0}=\varepsilon(0,y)\mu(0,y)h(y)\delta(\alpha)+\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)r(y)\theta(t),\\
&y\in(-D,D), \qquad |\alpha|<t<T,\\
&\vartheta\,|_{y=-D}=\vartheta\,|_{y=D}=0,
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$L_1\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{1}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\alpha_y\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}\right]-$$

$$-\frac{\mu_\alpha{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}-\frac{1}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\mu_\alpha{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\mu_y{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_y{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]-\frac{\sigma(\alpha,y)}{\varepsilon(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

Для выделения регулярных и сингулярных частей решения представим теперь решение задачи (5) в виде:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=S(t,y)\theta(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_1(t-|\alpha|)+\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t), \qquad (6)$$

где $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$- непрерывная функция, $\theta_1(t)=t\theta(t)$.

Решение задачи (5) по формуле Даламбера будет

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{\varepsilon(0,y)\mu(0,y)h(y)}{2}\delta(t-|\alpha|)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\alpha-t+\tau}^{\alpha+t-\tau}L_1\vartheta(\xi,y,\tau)d\xi d\tau.$$

Подставляя (6) в формулу Даламбера и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми сингулярными частями, получим интегральные уравнения второго рода относительно $S(t,y)$ и $R(t,y)$.

$$S(t,y)=\frac{h(y)\mu(o,y)\varepsilon(o,y)}{2}+\frac{1}{2}\int_o^t\left\{\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left[\alpha_yS(\tau,y)+\Delta\alpha S(\tau,y)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\mu'_\tau(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}+\frac{\mu'_y(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\cdot\alpha_y\cdot\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\right]*S(\tau,y)-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}S(\tau,y)\right\}d\tau, \qquad (7)$$

$$t\in[0,T], \qquad y\in(-D,D),$$

$$R(t,y)=\frac{r(y)\mu(0,y)\varepsilon(0,y)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left\{S_{yy}-\frac{\mu'_y(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}S_y-\right.$$

$$-\frac{\mu'_\tau(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\alpha_yS_y+\alpha_yR_y+\Delta\alpha R(\tau,y)-\left[\frac{\mu'_\tau}{\mu(\tau,y)}+\frac{\mu'_y(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}*\right. \qquad (8)$$

$$\left.\left.*\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}\right]*R(\tau,y)\right\}d\tau, \ t\in[0,T], \qquad y\in(-D,D).$$

Из вышеизложенных, учитывая (6), получим следующую задачу с данными на характеристиках, эквивалентной к задаче (1):

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2} + L_1 \vartheta(\alpha, y, t), \ |\alpha| \langle t \langle T, \qquad y \in (-D, D), \\ \vartheta \,|_{|\alpha| = t} = S(t, y), \qquad t \in [0, T], \qquad y \in (-D, D), \\ \vartheta \,|_{y = -D} = \vartheta \,|_{y = +D} = 0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Можно получить следующие соотношения, необходимые в дальнейших выкладках.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \,|_{|\alpha| = t} = S_y(t, y), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y \in (-D, D), \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} \,|_{|\alpha| = t} = S_t(t, y) + R(t, y), \qquad t \in [0, T], \qquad y \in (-D, D), \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} \,|_{|\alpha| = t} = -sign\alpha R(t, y), \qquad t \in [0, T], \qquad y \in (-D, D). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Теорема единственности.

Введем следующие обозначения и норму

$$\begin{array}{l}\Pi_{11} = \min\limits_{|\alpha| < T} \ \min\limits_{y \in (-D, D)} \{|\mu(\alpha, y)|, |\varepsilon(\alpha, y)|\}, \\ \Pi_{12} = \max\limits_{|\alpha| < T} \ \max\limits_{y \in (-D, D)} \{|\mu'_\alpha(\alpha, y)|, |\mu'_y(\alpha, y)|\}, \\ \Pi_{13} = \max\limits_{|\alpha| < T} \ \max\limits_{y \in (-D, D)} \{\sigma(\alpha, y)\}, \\ \Pi_{14} = \max\limits_{z \in T} \ \max\limits_{y \in (-D, D)} \{|\alpha_y|, |\alpha_{yy}|, |\Delta \alpha|\}, \\ \|\vartheta\|^2(t) = \int\limits_{-D}^{D} \int\limits_{-t}^{t} \vartheta^2(\alpha, y, t) d\alpha dy, \quad t \in [0, T]. \end{array} \tag{11}$$

Умножая каждый член уравнения (9) на $2\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}$ и интегрируя по области $\Omega(T, D)$ можно получить оценки $\left(\Omega(T, D) = \{(\alpha, y, t) : \alpha \in (-T, T), \alpha < t < T - \alpha, y \in (-D, D)\}\right)$

$$\begin{array}{l}\|\vartheta\|_1^2(t) \le 2\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|) + \dfrac{2\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} \right\| (\tau) d\tau + \\ + \dfrac{2}{\Pi_{11}^2} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\| (\tau) d\tau + \dfrac{2\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\| (\tau) d\tau + \\ + \dfrac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} \right\| (\tau) d\tau + \dfrac{2\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\| (\tau) d\tau + \\ + \dfrac{2\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} \right\| (\tau) d\tau + \dfrac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}^3} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\| (\tau) d\tau + \\ + \dfrac{2\ddot{I}_{13}}{\ddot{I}_{11}} \int\limits_{|\alpha|}^{t} \left\| \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \right\|^2 (\tau) d\tau, \end{array} \tag{12}$$

ãäå

$$\|\vartheta\|_1^2(t) = \|\vartheta_t\|^2(t) + \|\vartheta_\alpha\|^2 + \frac{1}{\ddot{I}_{11}^2}\|\vartheta_y\|^2(t) + \frac{\ddot{I}_{14}}{\ddot{I}_{11}}\|\vartheta_\alpha \vartheta_{\acute{o}}\|(t).$$

Будем оценивать интеграл

$$\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau \le \int\limits_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|^2\right](\tau)d\tau \le \int\limits_{|\alpha|}^{t}\|\vartheta\|_1^2(\tau)d\tau\cdot$$

Остальные интегралы, оценивая таким же образом и используя формулу Гроноулла-Беллмана из неравенства (12) получим следующее неравенство

$$\|\vartheta\|_1^2(t) \le \|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)\cdot\exp\left[\left(6\frac{\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}+\frac{2}{\Pi_{11}^2}+\frac{4\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\right)t\right].$$

Из последнего неравенства, используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений получим следующее неравенство:

$$\max_{|\alpha|\le\tau\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(\tau)\right\} \le \left\{\|\vartheta\|_2^2|\alpha|\right\}*$$

$$*\exp\left[\left(\frac{7\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}+\frac{3}{\Pi_{11}^2}+\frac{4\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\right)t\right],$$

$$\text{где} \qquad \|\vartheta\|_2^2(t) = \left(\|\vartheta\|^2+\|\vartheta_t\|^2+\|\vartheta_\alpha\|^2+\|\vartheta_y\|^2\right)(t).$$

Таким образом, доказана теорема единственности.

Теорема 2. Пусть функции $\mu(\alpha,y),\varepsilon(\alpha,y),\sigma(\alpha,y),\alpha y,\Delta\alpha$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть решение задачи (9) существует и принадлежит $C^2(\Omega(T,D))$ и выполнено (4). Тогда решение задачи (9) единственно в области $\Omega(T,D)$ и имеет оценку

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(t)\right\} \le \|\vartheta\|_2^2(|\alpha|)*\exp(\Pi_{15}t),$$

$$\text{где} \qquad \Pi_{15}=\frac{7\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}+\frac{3}{\Pi_{11}^2}+\frac{4\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}. \qquad (13)$$

Из эквивалентности задач (9) и (1) следует, что решение задачи (1) также единственно в области $\Omega(T,D)$, при выполнении условия теоремы 2.

Заключение. В данной статье обосновано одно из условий корректности задачи, единственности решения двумерной прямой задачи.

Литература:

1. Жданов М.С., Спичак В.В. Состояние и перспективы численного моделирования электромагнитных полей в трехмерных средах //Алгоритмы и программы решения прямых и обратных задач электромагнитной индукции в Земле. – М.: ИЗМИРАН, 1982. – С. 3-10.
2. Жданов М.С., Спичак В.В. Современные методы моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трёхмерно- неоднородных средах. Препринт ИЗМИРАН №45(519), - М. 1984, 31 с.
3. Варенцев И.М. Современные тенденции в решении прямых и обратных задач трехмерной геоэлектрики //Математические моделирование электромагнитных полей. –М.: ИЗМИРАН, 1983. – С. 26-68.
4. Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Применение асимтотических граничных
5. условий в задачах моделирования электромагнитных полей в неоднородных средах // Проблемы морских электромагнитных исследований. -М.: ИЗМИРАН. 1980.
6. Варенцов И.М., Голубев Н.Г.Об одном алгоритме конечно - разност-
7. ного моделирование электромагнитных полей // Фундаментальные проблемы
8. морских электромагнитных исследований. - М. : ИЗМИРАН, 1980.
9. Слипченко А.А. Численное решение прямой электромагнитный задачи для неоднородной среды // Численные методы геоэлектрики и математические обеспечение ЭВМ /Сборник научных трудов. -Новосибирск.1987. - С.111-114.
10. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
11. Тихонов А.Н., Свешников А.Г., Дмитриев В.И., Ильинский А.С. Некоторые общие алгоритмы решения прямых и обратных задач электродинамики // Вычислительные методы и программирование. - М.: МГУ, 1973, вып. XX. -С. 3-11.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.