Сатыбаев А.Дж., Алимканов А.А.

ӨТӨ ТЕЗ БУЛАКТУУ СЕЙСМИКАНЫН ЭКИЛИК ТҮЗ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН ЖАШООСУ

Сатыбаев А.Дж., Алимканов А.А.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ

A.Dj. Satybaev, A.A. Alimkanov

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL SEISMIC DIRECT PROBLEMS WITH INSTANT SOURCE

УДК: 519.633:550.34

Бул макалада өтө тез булактуу сейсмиканын экилик түз маселесинин чечиминин жашоосунун далилдөөсү каралат.

Негизги сөздөр: *экилик, түз маселе, чечимдин жашоосу, бат берилүүчү булак.*

В данной статье рассмотрено существование решения двумерной прямой задачи сейсмики с мгновенным источником.

Ключевые слова: *двумерная, прямая задача, существование решение, мгновенный источник.*

This article describes the two-dimensional direct problem in this formulation, is required to investigate the inverse problem. Posed the problem being investigated and decisiontion problems.

Key words: *two-dimensional, direct problem, the existence of a solution, an instant source.*

Введение. Основной причиной возникновения землетрясений является разрядка напряжений периодически накапливающихся в земной коре и верхней мантии. Накопления напряжений связано с силами трения, сдерживающими раздвиг, поддвиг или смещения движений тектонических плит земли. Геофизические методы разведки основаны на изучении физических полей, как естественных, так и искусственных: магниторазведка, гравиразведка, электроразведка, сейсморазведка и радиометрическая разведка.

Большое число численного моделирования волновых полей в сложно построенных средах было решено численно-аналитическими методами.

Постановка задачи. При землетрясении на поверхности Земли проходят сейсмические волны и конечно достаточно быстро. Если учесть поверхность и внутри Земли, а также время прохождения этого явления, то математические модели сейсмических волн описывается следующим двумерным дифференциальным уравнением

$$\overline{\rho}(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{\mu}(x,y)\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(2\overline{\mu}(x,y)+\overline{\lambda}(x,y)\right)\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (1)$$

$$x\in R_+,\quad y\in R,\ t\in R_+,$$

где $\overline{\rho}(x,y)$, $\overline{\mu}(x,y)$, $\overline{\lambda}(x,y)$ - плотность и коэффициенты Ламэ, $U(x,y,t)$ - возмущение двумерной среды.

Прямая задача. Определить функцию $U(x,y,t)\in W_2^1(\Omega(T,D))$ при известных функциях $\overline{\rho}(x,y)$, $\overline{\mu}(x,y)$, $\overline{\lambda}(x,y)$, а также при заданных начальных и граничных условиях следующего вида:

$$U\big|_{t<0}\equiv 0,\ x\in R_+,\quad y\in R, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2} r(y)\delta(t), \quad y \in (-D, D), \tag{3}$$

где $r(y)$ - источник - заданная функция, $\delta(t)$ - дельта функция Дирака, мгновенный источник, $W_2^1(\Omega(T,D))$ – гильбертово пространство.

Пусть относительно заданных функций выполнены условия:

$$\bar{\rho}(x,y), \qquad \bar{\mu}\ (x,y), \quad \bar{\lambda}(x,y) \in \Lambda_1, \ \bar{\mu}\ (x,y) = -\ \lambda(x,y) \tag{4}$$

$$r(y) \in \Lambda_2\ . \tag{5}$$

где

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}\ (x,y) \in C^6((0,d)\times(-D_1,D_1)),\ \sup p\{\bar{\rho}\ (x,y)\} \subset ((0,d)\times(-D_1,D_1)), \\ a = \|\bar{\rho}\ \|_{C^2((0,d)\times(-D_1,D_1))}, \quad a \langle\langle M_1 \end{array} \right\},$$

$$\Lambda_2 = \{\sup p\, r(y) \in (-D,D), r(y) \in C^5(-D,D)\}, \ \ 0 < M_1, M_2, M_3, D_1, d = const,$$

$$D = D_1 + T(M_2 + a), T = 2d/(M_1 - a).$$

В силу гиперболичности уравнения и условия (4)-(5), время, возмущение порожденной функцией источником успеет достигнуть глубину d, для всех y и вернуться обратно на поверхность $x = 0$, равно $T = 2d/M_1, D = D_1 + T\cdot M_2$.

Получение регулярной задачи с данными на характеристиках

Учитывая условия (4)-(5), а также гиперболичности уравнений можно установить, что решение задачи (1)-(3) равно нулю при $y \ge \pm D, \quad D = D_1 + M_1 T, \quad T$ - фиксированное число из R_+. Пусть выполнено условие (4), т.е. $\bar{\mu}\ (x,y) = -\ \lambda(x,y)$, тогда из (1) получим

$$\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\bar{\mu}(x,y)}{\bar{\rho}(x,y)}\left[\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2}\right] +$$

$$+ \frac{\bar{\mu}'_x(x,y)}{\bar{\rho}(x,y)}\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\bar{\mu}'_y(x,y)}{\bar{\rho}(x,y)}\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}.$$

Введем новую переменную $\alpha(x,y)$ удовлетворяющее

$$\alpha_x^2(x,y) + \alpha_y^2(x,y) = \frac{\bar{\rho}(x,y)}{\bar{\mu}(x,y)}, \quad \alpha(x,y)\big|_{x=0} = 0, \ \alpha_x(x,y)\Big|_{x=0} = \frac{\bar{\rho}(0,y)}{\bar{\mu}(0,y)}, \ \alpha_x(x,y) > 0, \lim_{z\to\infty}\alpha(x,y) = \infty \tag{6}$$

и новые функции $\mu(\alpha,y) = \bar{\mu}(x,y),\ \rho(\alpha,y) = \bar{\rho}(x,y),\ u(\alpha,y,t) = U(x,y,t),$. (7)

Регулярные и сингулярные части решения этой задачи выделим по методике В.Г. Романова, представляя решение задачи в виде

$$u(\alpha,y,t) = \bar{u}(\alpha,y,t) + S(t,y)\theta(t - |\alpha|) + R(t,y)\theta_1(t - |\alpha|), \tag{8}$$

где $\bar{u}(\alpha,y,t)$ - непрерывная функция.

В силу гиперболичности уравнения и условий (4)-(5) решение задачи (7) равно нулю вне характеристического угла, в этом случае и непрерывная функция $\bar{u}(\alpha, y, t)$ также равна нулю вне характеристического угла, следовательно $\bar{u}(\alpha, y, t)\Big|_{t=|\alpha|} = 0$, а значит $u(\alpha, y, t)\Big|_{|\alpha|=t} = S(t, y)$.

Вычислим следующие значения решения задачи, которые необходимы в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{|\alpha|=t} = S_y(t,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{|\alpha|=t} = S_t(t,y) + R(t,y) \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right|_{|\alpha|=t} = -sign(\alpha)R(t,y), \quad t\in(0,T), \quad y\in(-D,D). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Используя методы выпрямления характеристик [2] и выделения особенностей решении прямой задачи [1] получим следующую задачу, эквивалентную задаче (1)-(3), с данными на характеристиках см. [3]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial \alpha^2} + Lu(\alpha,y,t), \ (\alpha,y,t)\in\Omega(T,D), \\ &u(\alpha,y,t)\big|_{|\alpha|=t} = S(t,y), \quad t\in[0,T], \ y\in[-D,D], \\ &\left.\frac{\partial u(\alpha,y,t)}{\partial \alpha}\right|_{|\alpha|=t} = sign(\alpha)R(t,y), \quad t\in[0,T], \ y\in[-D,D], \\ &u(\alpha,y,t)\big|_{y=-D} = u(\alpha,y,t)\big|_{y=D} = 0, \quad |\alpha|\le t<T, \end{aligned}\right| \tag{10}$$

где $\Omega(T,D)=\{|\alpha|<t<T, \ \alpha\in[-T,T], \ y\in(-D,D)\}$.

$$Lu(\alpha,y,t) = \frac{\mu(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial y^2} + \alpha_y\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial y} + \Delta\alpha\frac{\partial u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}\right] +$$

$$+\frac{\mu'_\alpha(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}u_\alpha + \left[\frac{\mu'_\alpha(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\alpha_y u_y + \frac{\mu'_y(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\alpha_y u_\alpha + \frac{\mu'_y(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}u_y\right],$$

$$\Delta\alpha(z,y) = \alpha_{zz} + \alpha_{yy}, \ \alpha_y = \alpha_y(z,y).$$

Здесь $S(t,y), \ R(t,y) -$ функции, зависящие от известных функций:

$$S(t,y) = \frac{r(y)}{2} * \frac{\mu(0,y)}{\rho(0,y)} + \frac{1}{2}\int_0^t \left\{\frac{\mu(\tau,y)}{\rho(\tau,y)}\left[\alpha_y(\tau,y)S_y(\tau,y) + \Delta\alpha(\tau,y)S(\tau,y)\right] + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \left[\frac{\mu'_\tau(\tau,y)}{\rho(\tau,y)} + \frac{\mu'_y(\tau,y)}{\rho(\tau,y)}\alpha_y(\tau,y)\right]S(\tau,y)\right\}d\tau, \quad t\in(0,T), \ y\in(-D,D),$$

$$R(t,y)=\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\frac{\mu(\tau,y)}{\rho(\tau,y)}\left[S_{yy}(\tau,y)-\frac{\mu'_y}{\rho(\tau,y)}S_y-\frac{\mu'_\tau}{\rho(\tau,y)}\alpha_y S_y+\alpha_y R_y+\Delta\alpha R(\tau,y)\right]+\right. \tag{11}$$

$$\left.+\left[\frac{\mu'_\tau}{\rho(\tau,y)}+\frac{\mu'_y}{\rho(\tau,y)}\alpha_y(\tau,y)\right]R(\tau,y)\right\}d\tau,\quad t\in(0,T),\ y\in(-D,D),$$

Существования решений этих последних интегральных уравнений, при выполнении условий (4)-(5) можно найти в монографии С.И. Кабанихина [2].

Обобщенным решением задачи (10) назовем функцию $u(\alpha,y,t)$ удовлетворяющую

$$\int_0^t\int_{|\alpha|}^t\int_{-D}^D\left[\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}+Lu(\alpha,y,\tau)\phi(\alpha,y,\tau)\right]dyd\alpha d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^t\int_{-D}^D S(\tau,y)\phi(\alpha,y,\tau)dyd\tau,\ t\in(0,T),\ (*).$$

где $\phi(\alpha,y,t)\in C^2(\Omega(T,D))$,

Используя известные разностные обозначения, напишем разностный аналог дифференциальной задачи (10):

$$\left.\begin{aligned}
&u_{t\bar t}=u_{\alpha\bar\alpha}+Lu_{ij}^k+O(\tau,h_1,h_2),\\
&u_{\pm ij}^{|i|}=S_{ij},\quad i=\overline{0,N},\ j=-\overline{L,L};\\
&u_{\alpha,\pm ij}^{|i|}=R_{ij},\quad i=\overline{0,N},\ j=-\overline{L,L};\\
&u_{\pm i,-L}^k=u_{\pm i,L}^k=0,\quad i=\overline{0,N},\ k=\overline{|i|,M}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $h_1=T/N$; $h_2=D/L$; $\tau=T/M$; $u_{t\bar t}=\left(u_{ij}^{k+1}-2u_{ij}^k+u_{ij}^{k-1}\right)/\tau^2$,

$u_{ij}^k=u(k\tau,\,ih_1,\,jh_2)$, $u_{\bar\alpha}=\left(u_{ij}^k-u_{i-1j}^k\right)/h_1$, $u_y=\left(u_{ij+1}^k-u_{ij}^k\right)/h_2$ *и т.д.*

$$Lu_{ij}^k=\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}}\left[u_{y\bar y}+\alpha_{\bar y}u_{\alpha\bar y}+(\Delta\alpha)_{ij}u_{\bar\alpha}\right]+\frac{\mu_{\bar\alpha}}{\rho_{ij}}u_\alpha+\left[\frac{\mu_{\bar\alpha}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar y}u_{\bar y}+\frac{\mu_{\bar y}}{\rho_{ij}}\alpha_{\bar y}u_\alpha+\frac{\mu_{\bar y}}{\rho_{ij}}u_{\bar y}\right].$$

$$S_{kj}=\frac{1}{2}r_j*\frac{\mu_{0j}}{\rho_{0j}}+\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^k\left\{\frac{\mu_{lj}}{\rho_{lj}}\left[\alpha_{\bar y}\left(S_{\bar y}\right)_{\ell j}+(\Delta\alpha)_{\ell j}S_{\ell j}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\left(\mu_{\bar\tau}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}+\frac{\left(\mu_{\bar y}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}\alpha_{\bar y}\right]S_{\ell j}\right\}\bullet\tau\quad -\textit{формула прямоуголь ников}.$$

$$R_{kj}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k}\left\{\frac{\mu_{lj}}{\rho_{lj}}\left[\left(S_{\overline{y}\underline{y}}\right)_{\ell j}+\frac{\left(\mu_{\overline{y}}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}\left(S_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+\frac{\left(\mu_{\overline{\tau}}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}\left(\alpha_{\overline{y}}\right)_{\ell j}\left(S_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_{\overline{y}}\left(R_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+(\Delta\alpha)_{\ell j}R_{\ell j}\right]+\left[\frac{(\mu_{\tau})_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}+\frac{(\mu_{y})_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}C_{\ell j}^{2}\alpha_{\underline{y}}\right]R_{\ell j}\right\}\cdot\tau.\quad k=\overline{0,M},\quad j=-\overline{L,L};$$

Определим кусочно-непрерывную функцию $\widetilde{u}(\alpha,y,t)$ внутри параллелепипеда

$$\prod=\{k\tau\le t\le(k+1)\tau,\ ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,\ jh_2\le y\le(i+1)h_2\}$$

$$\widetilde{u}(\alpha,y,t)=u_{ij}^{k}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{y}{\tau}\right)+u_{ij}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+$$

$$+u_{i+1j}^{k}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+u_{ij+1}^{k}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+$$

$$+u_{i+1j+1}^{k}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+u_{i+1j}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+$$

$$+u_{ij+1}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+u_{i+1j+1}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right),\tag{15}$$

Пусть выполнены следующие условия

$$\left.\begin{aligned}&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(u_{ij}^{k}\right)^2\le A, &&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\\&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right)^2\le B_1, &&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3,\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Покажем, что

$$\left.\begin{aligned}&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le A, &&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u_{\alpha}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_2,\\&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u_{t}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_1, &&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u_{y}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_3,\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Вычислим следующий интеграл при $t=k\tau,\ ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,\ jh_2\le y\le(j+1)h_2$

$$\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy=\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\left[u_{ij}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+\right.$$

$$\left.+u_{i+1j}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{ij+1}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\right]^2 d\alpha dy=$$

$$=\left|\frac{\alpha}{h_1}-i=\xi,\ \frac{y}{h_2}-j=\eta\right|=h_1h_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[u_{ij}^k(1-\xi)(1-\eta)+u_{i+1j}^k(\xi(1-\eta))+\right.$$

$$\left.+u_{ij+1}^k((1-\xi)\eta)+u_{i+1j+1}^k(\xi\cdot\eta)\right]^2 d\xi d\eta.$$

Обозначим $a=u_{ij}^k,\quad b=u_{i+1j}^k,\quad c=u_{ij+1}^k,\quad d=u_{ij}^{k+1}.$ Тогда справедлива

$$\int_0^1\int_0^1[a(1-\varsigma)(1-\eta)+в(1-\eta)\cdot\varsigma+c(1-\varsigma)\eta+d\varsigma\eta]^2d\varsigma d\eta=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left\{a^2(1-\varsigma)^2(1-\eta)^2+b^2(1-\eta)^2\cdot\varsigma^2+c^2(1-\varsigma)^2\eta^2+d^2\varsigma^2\eta^2+\right.$$

$$+2ab(1-\varsigma)\cdot(1-\eta)^2\cdot\varsigma+2ac(1-\varsigma)^2\cdot(1-\eta)\cdot\eta+2ad\cdot(1-\varsigma)(1-\eta)\cdot\varsigma\eta+$$

$$\left.+2bc(1-\eta)(1-\varsigma)\varsigma\cdot\eta+2bd(1-\eta)\varsigma^2\cdot\eta+2cd(1-\varsigma)\cdot\eta^2\cdot\varsigma\right\}d\varsigma d\eta=$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}a^2(1-\eta)^2+\frac{1}{3}b^2(1-\eta)^2+\frac{1}{3}c^2\eta^2+\frac{1}{3}d^2\eta^2+2ab\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right](1-\eta)^2+2\frac{1}{3}ac\cdot\eta(1-\eta)+\right.$$

$$\left.+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\eta(1-\eta)+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\eta\cdot(1-\eta)+2bd\cdot\frac{1}{3}(1-\eta)\cdot\eta+2cd\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\eta^2\right\}d\eta=$$

$$=\frac{\alpha^2}{3}\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{b^2}{3}\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{c^2}{3}\int_0^1\eta^2d\eta+\frac{d^2}{3}\int_0^1\eta^2d\eta+$$

$$+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{2ac}{3}\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+$$

$$+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+2bd\frac{1}{3}\int_0^1(1-\eta)\cdot\eta d\eta+2cd\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\int_0^1\eta^2d\eta=$$

$$=\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}+\frac{c^2}{9}+\frac{d^2}{9}+2ab\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{1}{3}+\frac{2ac}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^2+$$

$$+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^2+\frac{2bd}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+2cd\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=$$

$$=\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}+\frac{c^2}{9}+\frac{d^2}{9}+\frac{ab}{9}+\frac{ac}{9}+\frac{ad}{18}+\frac{bc}{18}+\frac{bd}{9}+\frac{cd}{9}\le$$

$$\le\frac{1}{9}\left[a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+\frac{ad}{2}+\frac{bc}{2}+bd+cd\right]\le$$

$$\leq \frac{1}{9}\left[\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{2} + \frac{d^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right] \leq \frac{1}{4}\left[a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right];$$

$$\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1} \int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2} \tilde{u}^2(\alpha, y, k\tau)d\alpha dy \leq \frac{1}{4}h_1 h_2 \left[\left(u_{ij}^k\right)^2 + \left(u_{ij+1}^k\right)^2 + \left(u_{i+1j}^k\right)^2 + \left(u_{i+1j+1}^k\right)^2\right].$$

Просуммируем на весь интервал, тогда

$$\sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2} \int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1} \tilde{u}^2(\alpha, y, k\tau)d\alpha dy \leq h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \left(u_{ij}^k\right)^2 \leq A. \quad (18)$$

Для $t = (k+1)\tau,\ ih_1 \leq \alpha \leq (i+1)h_1,\ jh_2 \leq y \leq (j+1)h_2$ также можно показать выше полученное неравенство.

Покажем линейность функции $\tilde{u}(\alpha, y, t)$ по t при $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$.

Рассмотрим

$$\tilde{u}(\alpha, y, k\tau) = u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{k\tau}{\tau}) + u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(y+1-\frac{y}{h_2}) \cdot$$

$$\cdot(\frac{k\tau}{\tau} - k) + u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1} - i)(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{k\tau}{\tau}) + u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2} - j)(k+1-\frac{k\tau}{\tau}) +$$

$$+ u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1} - j)(\frac{y}{h_2} - j)(k+1-\frac{k\tau}{\tau}) + u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1} - i)(j+1-\frac{y}{h_2})(\frac{k\tau}{\tau} - k) +$$

$$+ u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2} - j)(\frac{k\tau}{\tau} - k) + u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1} - i)(\frac{y}{h_2} - j)(\frac{k\tau}{\tau} - k) =$$

$$= u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2}) + u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1} - i)(j+1-\frac{y}{h_2}) +$$

$$+ u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2} - j) + u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1} - i)(\frac{y}{h_2} - j);$$

$$\tilde{u}(\alpha, y, (k+1)\tau) = u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{(k+1)\tau}{\tau}) + u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+$$

$$+1-\frac{y}{h_2})(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)+u_{i+1j}^{k}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{(k+1)\tau}{\tau})+$$

$$+u_{ij+1}^{k}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(k+1-\frac{(k+1)\tau}{\tau})+u_{i+1j+1}^{k}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}+j)(k+1--\frac{(k+1)\tau}{\tau})+$$

$$+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)+$$

$$+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)=u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})+$$

$$+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\alpha,y,t)&=(k+1-\frac{t}{\tau})\tilde{u}(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t}{\tau}-k)\tilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)=\\&=\left[(1-\frac{t-k\tau}{\tau})\tilde{u}(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})\tilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)\right].\end{aligned}\tag{19}$$

Это означает линейность функции. Отсюда

$$\begin{aligned}&\tilde{u}^2(\alpha,y,t)=(1-\frac{t-k\tau}{\tau})^2\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+2(1-\frac{t-k\tau}{\tau})(\frac{t-k\tau}{\tau})\tilde{u}(\alpha,y,k\tau)\tilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)+\\&+(\frac{t-k\tau}{\tau})^2\tilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\le 2\left[(1-(\frac{t-k\tau}{\tau}))^2\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})^2\tilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\right]\le\\&\le(1-\frac{t-k\tau}{\tau})\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})\tilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau).\end{aligned}\tag{20}$$

Тогда очевидно, что при $\tau k\le t\le(k+1)\tau$ или $0\le\frac{t-\tau k}{\tau}\le 1$ справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned}&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\begin{cases}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\\ \int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\end{cases}\le\\&\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}(u_{ij}^{k})^2\le A.\end{aligned}\tag{21}$$

Это означает справедливость первого неравенства формулы (17).

Докажем, что $\max\limits_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_1$, если $\max\limits_{|i|\le k\le M} h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left[\dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right]^2 \le B_1.$

При $t = k\tau,$ $ih_1 \le \alpha \le (i+1)h_1,$ $ih_2 \le y \le (j+1)h_2$ рассмотрим

$$\tilde{u}_t(\alpha, y, t) = u_{ij}^{k}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(-\frac{1}{\tau}) + u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})\frac{1}{\tau} +$$

$$+u_{i+1j}^{k}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(-\frac{1}{\tau}) + u_{ij+1}^{k}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(-\frac{1}{\tau}) +$$

$$+u_{i+1j+1}^{k}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)(-\frac{1}{\tau}) + u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})\frac{1}{\tau} +$$

$$+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)\frac{1}{\tau} + u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)\frac{1}{\tau} =$$

$$=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau} + \frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+$$

$$+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau} + \left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}.$$

Суммировав на всем интервале и обозначая

$$a_1 = \frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}, b_1 = \frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}, c_1 = \frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau},$$

$$d_1 = \frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau},$$

$$h_1 h_2 \int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2} \int\limits_{ih_1}^{(y+1)h_1} \tilde{u}_t^2(\alpha, y, t)d\alpha dy = h_1 h_2 \int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2} \int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1} [\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(i+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau} +$$

$$\left[+\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)*\right.$$

$$*\left.\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}\right]^2 d\alpha dy=\left|\frac{\alpha}{h_1}-i=\xi \quad \frac{y}{h_2}-j=\eta\right|=$$

$$=h_1h_2\int_0^1\int_0^1\left[(1-\xi)(1-\eta)a_1+\xi(1-\eta)b_1+(1-\xi)\eta c_1+\xi\eta d_1\right]^2 d\xi d\eta=h_1h_2\frac{1}{4}\left[a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right]. \quad (22)$$

Из последнего вытекает

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}u_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{j=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right]^2\le B_1.$$

Можно показать линейность функций $\widetilde{u}_t(\alpha,y,t)$

Докажем $\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}_{\alpha}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_2,$

$$\textit{если}\quad \max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}\right]^2\le \mathrm{B}_2.$$

Вычислим в прямоугольнике $t=\kappa\tau \; ih_1<\alpha<(i+1)h_1, \quad jh_2<y\le(j+1)h_2$ следующие

$$\widetilde{u}_{\alpha}(\alpha,\gamma,t)=\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{h_2}\right)\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}+\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_1}+$$

$$+\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{ij+1}^{k}}{h_1}+\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k+1}}{h_1};$$

$$\widetilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)=\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}+\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{ij+1}^{k}}{h_2};$$

Проинтегрируем $\widetilde{u}_{\alpha}^2(\alpha,y,\kappa\tau)$

$$\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\widetilde{u}_{\alpha}^2(\alpha,y,\kappa\tau)d\alpha dy=\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[\left(i+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{ij+1}^{k}}{h_2}\right)\right]^2 d\alpha dy=\left|\begin{matrix}\eta=\frac{y}{h_2}-j, & \frac{\alpha}{h_1}-i=\xi\\ dy=h_2d\eta & d\alpha=h_1d\xi\end{matrix}\right|=$$

$$= h_1 h_2 \int_0^1 \left[(1-\eta) \frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} + \eta \frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_1} \right]^2 d\eta =$$

$$\left| \textit{обозначая} \;\; a_2 = \left(u_{i+1j}^k - u_{ij}^k \right) / h_1, \qquad b_2 = \left(u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k \right) / h_1 \right| =$$

$$= h_1 h_2 \int_0^1 \left[(1-\eta)^2 \cdot \alpha_2^2 + 2(1-\eta) \cdot \eta a_2 b_2 + \eta^2 b_2^2 \right] d\eta =$$

$$= h_1 h_2 \left[\frac{1}{3} a_2^2 + 2 a_2 b_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{3} b_2^2 \right] \le h_1 h_2 \left[\frac{1}{3} a_2^2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 - \frac{1}{3} a_2^2 - \frac{1}{3} b_2^2 + \frac{1}{3} b_2^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} h_1 h_2 \left[a_2^2 + b_2^2 \right] \le \frac{h_1 h_2}{2} \left[\left(\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_1} \right)^2 \right].$$

Суммируя последнее при $i = \overline{-N, N}, \; j = \overline{-L, L}$

$$\max_{|\alpha| \le t \le T} \int_{-D}^{D} \int_{-t}^{t} \tilde{u}_\alpha^2 (\alpha, y, k\tau) d\alpha dy \le \max_{|i| \le k \le M} \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N}$$

$$\left[\left(\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_1} \right)^2 \right] \le B_2. \tag{23}$$

Литература:

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – Москва: Наука, 1984. - 264 с.
2. Кабанихин С.И. Проекционно - разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение,1988. -168с.
3. Сатыбаев А. Дж., Мирсайитова М.Э. Обратная задача акустики с плоской границей//Наука. Образование. Техника./Международный научный журнал №2(4) . Ош, 2000. - С. 101-104.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: СНО. 2009. С.457.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.