ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL SCIENCE

Жусупбекова С.Т.

ЖАБЫШКАК СУЮКТУКТУН АГЫМЫНЫН ИЛМЕК БЕТТЕРДЕГИ ЖАЙЫЛУУСУНУН ЧЕТКИ МАСЕЛЕЛЕРИН САНДЫК АНАЛИЗДӨӨ

Жусупбекова С.Т.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

S.T. Jusupbekova

NUMERICAL ANALYSIS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM WRAPPING THE CONCAVE SURFACE FLOW OF A VISCOUS FLUID

УДК: 532.546

Жабышкак суюктуктун агымынын илмек беттердеги жайылуусунун четки маселелери каралып, аны чыгаруу үчүн белгилүү торчо методу колдонулган.

Формулируется краевая задача обтекания вогнутой поверхности потоком вязкой несжимаемой жидкости, для решения которой применяется известный метод сеток.

Formulated boundary value problem wrapping concave surface flow of a viscous incompressible fluid, which applies a known method of nets.

В ранее опубликованных работах [1] , [2] был проведен асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса в случае исследований вихрей Гертлера при больших, но при докритических значениях чисел Рейнольдса и Гертлера. Такое исследование позволяет выявить основные механизмы развития неустойчивости течения, определить параметры подобия, значительно упростить краевые задачи.

В данной статье приводится численный подход к решению одной из таких краевых задач. А именно случай обтекания вогнутой поверхности потоков вязкой несжимаемой жидкости при $Re \to \infty$. Была получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\rho U_1 + V_1^{I} + W_1 = 0\\
&\alpha(\beta y U_1 + V_1) = U_1'' - U_2\\
&\alpha(\beta y V_1 + 2yU_1 + P_1') = V_1'' - V_1\\
&\alpha(\beta y W_1 - P_1) = W_1'' - W_1
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

краевые условия:

$$U_1(0) = V_1(0) = W_1(0) = 0, \qquad U_1(\infty) = V_1(\infty) = W_1(\infty) = 0,$$

где $()' = \dfrac{d}{dy}$

Видно, что это задача на собственные значения: для каждой величины α можно искать одно или несколько значений собственного числа β.

Для численного решения уравнений (1) будем использовать метод сеток. Будем обозначать через W_N сетку, удовлетворяющую условиям:

$$\grave{a} = \tilde{o}_0 \prec \tilde{o}_1 \prec \tilde{o}_2 ..... \prec \tilde{o}_{N-1} \prec x_N \prec b,$$

а через f_i - значение сеточной функции $f(x)$ в точке $x_i \in W_N$, т.е. $f_i = f(x_i)$, где точки x_i являются узлами сетки W_N.

Теперь рассмотрим задачу о приближенном вычислении производных функций $U(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $[a, b]$. Будем считать, что $U(x)$ обладает необходимой по ходу изложения гладкостью. Введем тогда сетку:

$$w_N = \{x_i = a + ih, i = 0,1,\dots,N\}$$

и обозначим:

$$U_i = U(x_i), \quad U_{\bar{x},i} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h}, \quad U_{x,i} = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}, \quad U_{\dot{x},i} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

Выписанные здесь разностные отношения являются, соответственно, левой, правой и центральной разностными производными функции U(x) в точке $X = X_i$. Если точка X_i фиксирована, а шаг h стремится к нулю ($h \to 0$), то каждое из упомянутых разностных отношений стремится к значению производной функции U(x) в точке X_i . Поэтому в качестве приближенного значения производной U(x) можно взять любое из этих разностных отношений.

Нетрудно получить выражение для погрешности, возникающей при замене дифференциального выражения разностным. Рассмотрим, например, левую разностную производную в точке $X = X_i$ и запишем ее в виде:

$$U_{\bar{x},i} = \frac{U(x) - U(x-h)}{h}$$

По формуле Тейлора получим:

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{h^2}{2}U''(\xi), \qquad \xi \in (x-h, x)$$

следовательно:

$$U_{\bar{x},i} = U'(x_i) - \frac{h}{2}U''(\xi_i).$$

Погрешность, возникающая при замене дифференциального выражения разностным выражением, является погрешностью аппроксимации, то есть имеет место аппроксимация первого порядка.

Вторую производную функции U (x) можно приближенно заменить в точке $x_i \in W_N$ второй разностной производной:

$$U_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}\left(U_{x,i} - U_{\bar{x},i}\right) = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

Разложение по формуле Тейлора приводит к следующему выражению для погрешности:

$$U_{\bar{x}x,i} - U''(x_i) = \frac{h^2}{12}U^{IV}(\xi_i)$$

т.е. имеет место аппроксимация второго порядка.

Рассмотрим на примере произвольно выбранной задачи на собственные значения, свойства собственных значений и собственных функций. Пусть задача на собственные значения:

$$U''(x) + \lambda U(x) = 0$$

$$a < x < b, \qquad U(a) = U(b) = 0$$

имеет решение:

$$\lambda_R = \left(\frac{\pi R}{b-a}\right)^2, \qquad U_R(x) = \sin\frac{\pi R(x-a)}{b-a}, \qquad R = 1,2,\dots$$

Тогда на равномерной сетке получим разностный аналог этой задачи:

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + \lambda y_j^{(h)} = 0, \qquad j = 1,\ N-1$$

$$y_a = y_N = 0, \quad hN = b - a, \quad y_j = y(x_j), \quad x_j = a + j$$

Прежде всего получаем, что:

$$0 < \lambda_1^{(h)} < \lambda_2^{(h)} < \dots < \lambda_R^{(h)} < \lambda_{R+1}^{(h)} < \dots < \lambda_{N-1}^{(h)} < \frac{1}{h}$$

это неравенство не улучшаемо, так как:

$$\lambda_{N-1}^{(h)} = \frac{U}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2(b-a)}$$ и $$\cos^2\frac{\pi h}{2(b-a)} \to 1,\ h \to 0$$.

Оценку снизу для наименьшего собственного значения можно уточнить. Обозначая:

$$\alpha = \pi h/(2(b-a))$$

получим:

$$\lambda_1^{(h)} = \lambda_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$ где $$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2$$.

наименьшее собственное значение дифференциального уравнения. Не ограничивая общности, можно предположить, что

$$h \le (b-a)/3.$$

Тогда

$$\alpha \le \pi/6$$

и поскольку функция $\sin\alpha/\alpha$ монотонно убывает при $\alpha \in [0, \pi/6]$ получим:

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \ge \left(\frac{1}{2}\ \frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2}$$

т.е.

$$\lambda_1^{(h)} \ge 9/(b-a)^2$$

Таким образом, наименьшее собственное значение данной задачи отделено от нуля константой

$$\delta_1 = 9(b-a),$$

не зависящей от H.

Покажем теперь, что собственные задачи, отвечающие различным собственным значениям задачи, ортогональны в смысле скалярного произведения:

$$(U,V) = \sum_{j=1}^{N-1} U_j V_j h$$

Запишем исходное разностное уравнение (2) для функций $y^{(R)}$ и $y^{(L)}$ в виде:

$$y_{\bar{x}x,j}^{(R)} + \lambda_R^{(h)} y_j^{(R)} = 0 \qquad (3)$$

$$y_{\bar{x}x,j}^{(\ell)} + \lambda_j^{(h)} y_j^{(\ell)} = 0 \qquad (4)$$

Умножим уравнение (3) скалярно на $y^{(L)}$, уравнение (4) на $y^{(R)}$ и вычтем из первого полученного равенства второе. Тогда будем иметь:

$$\left(y_{\bar{x}x}^{(R)},\ y^{(\ell)}\right) - \left(y_{\bar{x}x}^{(\ell)},\ y^{(R)}\right) = \lambda_\ell^{(h)} - \lambda_R^{(h)} x y^{(R)}, y^{(\ell)}$$

для разностного аналога формулы интегрирования по частям получим:

$$\left(y_{\bar{x}x}^{(R)}, y^{(\ell)}\right) = -\left(y_{\bar{x}}^{(R)}, y_{\bar{x}}^{(\ell)}\right)$$

с учетом того, что

$$y_0^{(\ell)} = y_N^{(\ell)} = 0$$

аналогично этому имеем:

$$\left(y_{\bar{x}x}^{(\ell)}, y^{(R)}\right) = -\left(y_{\bar{x}}^{(\ell)}, y_{\bar{x}}^{(R)}\right) = -\left(y_{\bar{x}}^{(R)}, y_{\bar{x}}^{(\ell)}\right)$$

Следовательно, левая часть этого равенства обращается в нуль, и поскольку:

$\lambda_\ell^{(h)} \neq \lambda_R^{(h)}$ при $R \neq \ell$ получаем:

$\left(y^{(R)}, y^{(\ell)}\right) = 0$ при $R \neq \ell$.

Множество функций:

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N), \qquad y_j = y(x_j)$$

заданных на сетке W_h и удовлетворяющих нулевым граничным условиям:

$$y_0^{(\ell)} = y_N^{(\ell)} = 0,$$

образует (N – 1) - мерное линейное пространство H относительно покоординатного сложения и умножения на число.

Собственные функции $y^{(R)}$, (R = 1, 2, …N – 1) задачи (2) ортогональны и, следовательно, линейно независимы в H. Тем самым множество собственных функций задачи (2) образует ортогональный базис в H.

Нетрудно показать, что:

$$\left\|y^{(R)}\right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} h(y_j^{(R)})^2 = 0{,}5(b-a) \quad \text{для всех} \quad R = 1, \dots, N-1$$

Следовательно, множество собственных функций $\mu^{(R)}$ (R = 1, 2, …N – 1) координатами:

$$\mu_j^{(R)} = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\frac{\pi R j}{N}, \quad j = 1, \dots, N$$

образует в H ортонормированный базис. Любой элемент y из H можно единственным образом представить в виде разложения:

$$y = \sum_{R=1}^{N-1} c_R \mu^{(R)}.$$

Литература:

1. Бийбосунов А.И. Развитие вихрей Гертлера в пограничном слое сжимаемой жидкости около вогнутой поверхности. – Бишкек, сб. научных трудов КАСИ, 1995 г.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - Москва, Издательство «Иностранная литература», 1960 г.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Бийбосунов Б.И.