Абдукаримов А.М.

ЧЕКТЕЛБЕГЕН ОБЛАСТТАРДА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЕС ТИБИНДЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН КВАДРАТТЫК ИНТЕГРАЛДАНЫШЫ

Абдукаримов А.М.

О КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЕСА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

A.M. Abdukarimov

ABOUT QUADRATIC INTEGRABILITY OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR TWO-DIMENSIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE - STYLITES SECOND ORDER PARTIAL DERIVATIVES ON UNBOUNDED DOMAINS

УДК: 517.968

В работах [1-5] были рассмотрены вопросы квадратичной интегрируемости решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается квадратичная интегрируемость решений систем на бесконечной области для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтеса.

In [1-5] addressed the issues of the quadratic integrability of solutions on an infinite domain integral and integro-differential equations on the half.

In this paper we study the quadratic integrability of solutions of systems on an infinite domain for two-dimensional Volterra-Ctiltes integral equation.

[1-5] иштерде чексиз облаттагы интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин жарым октогу чыгарылыштарынын квадраттык интегралдануучулугу боюнча маселелер каралган.

Бул макалада Вольтер-Стильтес тибиндеги эки өлчөмдүү интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн чексиз областтагы чектүү чыгарылыштар системалары боюнча маселелер каралат.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$P(t,x)u_{tx}(t,x)+A(t,x)u_x(t,x)+B(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^x N(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x),\ (t,x)\in G$$

(1) $G=\{(t,x):0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\},\quad (t,x)\in G$

с условиями $f(t,x)\in L^{2,n}_{\varphi,\psi}(G)\cap C(G),$

(f')

$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,\quad +\infty),$$
$$u(t,0)=0,\qquad t\in[0,\quad +\infty),\qquad (*)$$

где $P(t,x),A(t,x),B(t,x),C(t,x),M(t,x,s),K(t,x,s,y),N(t,x,y)$ - $n\times n$ мерные самосопряженные заданные матричные функции, $f(t,x)$ - заданная и $u(t,x)$ -неизвестная n -мерные вектор- функции; $(t,x)\in G$.

$\varphi(t)$, $\psi(x)$ - строго возрастающие дифференцируемые n-мерные вектор- функции соответственно в области $G=\{(t,x):0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$, тогда $u_x(t,x),u_t(t,x)$ определяется следующим равенством

$$u_x(t,x)=\frac{\partial u(t,x)d\psi(x)}{\partial\psi(x)dx}=\psi_x(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial\psi(x)},u_t(t,x)=\frac{\partial u(t,x)d\varphi(t)}{\partial\varphi(t)dt}=\psi_t(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial\varphi(t)}$$

$$u_{tx}(t,x)=\varphi_t(t)\psi_x(x)u_{\varphi\psi}(t,x).$$

Обозначим через $C(G)$ - пространство всех непрерывных функций на $G=\{(t,x)/\,0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$. Через $L^{2,n}_{\varphi,\psi}(G)$ обозначим пространство всех n-мерные вектор - функции $u(t,x)$ удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\|u(t,x)\|^2 d\varphi(t)d\psi(x)<\infty .$$

В дальнейшем нам понадобятся легко доказуемые следующие леммы:

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\left\langle k\vartheta,\vartheta_{\varphi(s)}\right\rangle=\frac{1}{2}\langle k\vartheta,\vartheta\rangle_{\varphi(s)}-\frac{1}{2}\left\langle k_{\varphi(s)}\vartheta,\vartheta\right\rangle, \text{ где } \langle u,\vartheta\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\nu_{\varphi(\tau)\psi(z)}\right\rangle=\langle K\nu\rangle_{\varphi(\tau)\psi(z)}-\left\langle K_{\varphi(\tau)}\nu\right\rangle_{\psi(z)}-\left\langle K_{\psi(z)}\nu\right\rangle_{\varphi(\tau)}+\left\langle K_{\varphi(\tau)\psi(z)}\nu\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\vartheta,\vartheta_{\varphi(s)\psi(y)}\right\rangle=\frac{1}{2}\langle K\vartheta,\vartheta\rangle_{\varphi(s)\psi(y)}-\frac{1}{2}\left\langle K_{\varphi(s)}\vartheta,\vartheta\right\rangle_{\psi(y)}-\frac{1}{2}\left\langle K_{\psi(y)}\vartheta,\vartheta\right\rangle_{\varphi(s)}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle K_{\varphi(s)\psi(y)}\vartheta,\vartheta\right\rangle-\left\langle K\vartheta_{\varphi(s)},\vartheta_{\psi(y)}\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $P(t,x)\psi_x(x)\varphi_t(t), A(t,x)\psi_x(x), B(t,x)\varphi_t(t), C(t,x), A_{\psi(x)}(t,x)\psi_x(x)$, $B_{\varphi(t)}(t,x)\varphi_t(t)\ \in C_{n\times n}(G)$, $A(t,x)\ge 0,\ \ \varphi_t(t)\ge 0, \psi_x(x)\ge 0, B(t,x)\ge 0$,

$C(t,x)-\frac{1}{2}A_{\psi(x)}(t,x)\psi_x(x)-\frac{1}{2}B_{\varphi(t)}(t,x)\varphi_t(t)\ge\alpha\cdot E,\ \alpha>0$ при *(t, x)* $\in$ *C(G),*

$P(t,x)\ge 0,[P(t,x)\psi_x(x)\varphi_t(t)-1]\ge\beta>0$

б) матричные функции $M(t,x,s), M_{\varphi(t)}(t,x,s), M_{\varphi(s)}(t,x,s), M_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\ \in C_{n\times n}(G_1)$,

$M(t,x,0)\ge 0,\quad M_{\varphi(t)}(t,x,0)\le 0,$ при $(t,x)\in G$ и $M_{\varphi(s)}(t,x,s)\ge 0,\ M_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1=\{(t,x,s): 0\le s\le t<\infty, 0\le x<\infty\}$;

в) матричные функции $N(t,x,y), N_{\psi(x)}(t,x,y), M_{\psi(y)}(t,x,y),\ N_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\ \in C_{n\times n}(G_2)$,

$N(t,x,0)\ge 0$, $N_{\psi(x)}(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $N_{\psi(y)}(t,x,y)\ge 0,\quad N_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2=\{(t,x,s): 0\le t<\infty, 0\le y\le x<\infty\}$;

г) матричные функции

$K(t,x,s,y), K_{\psi(y)}(t,x,s,y), K_{\varphi(s)}(t,x,s,y), K_{\varphi(t)}(t,x,s,y), K_{\psi(x)}(t,x,s,y),\ K_{\phi(t)\phi(s)}(t,x,s,y)$,

$K_{\phi(t)\psi(x)}(t,x,s,y), K_{\psi(x)\phi(s)}(t,x,s,y), K_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,s,y)$, $K_{\phi(t)\psi(x)\psi(y)}(t,x,s,y)$, $K_{\phi(t)\psi(x)\phi(s)}(t,x,s,y)$, $K_{\psi(x)\phi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)$ и $K_{\varphi(t)\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y) \in C_{n\times n}(G_3)$, $K_{\psi(y)}(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_{\varphi(s)}(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $K(t,x,0,0)\geq 0$, $K_{\phi(t)}(t,x,0,0)\leq 0$, $K_{\psi(x)}(t,x,0,0)\leq 0, K_{\phi(t)\psi(x)}(t,x,0,0)\geq 0$ при $(t,x)\in G$ и $K_{\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\geq 0$, $K_{\varphi(t)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\leq 0$, $K_{\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\leq 0$, $K_{\varphi(t)\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\geq 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3=\{(t,x,s,y): 0\leq s\leq t<\infty, 0\leq y\leq x<\infty\}$;,

д) для любых $u,\vartheta\in R^n$ $<-M_{\varphi(t)}(t,x,0)u,u>-2<K(t,x,0,0)u,\vartheta>-<N_{\psi(x)}(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\leq 0$ при $(t,x)\in G$, то задача (1) – (*) имеет единственное решение в $L^{2,n}_{\varphi,\psi}(G)\cap C_n(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части системы (1) скалярно умножим на $u(t,x)$ и проинтегрируем по области $G_{tx}=\{(s,y): 0\leq s\leq t,\ 0\leq y\leq x\}$. Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x <A(s,y)\psi_y(y)u_{\psi(y)}(s,y),$$

$$,u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x <B(s,y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x <C(s,y)u(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x\int_0^s <M(s,y,\tau)u(\tau,y),u(s,y)>\times$$

$$\times d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y <N(s,y,z)u(s,z),u(s,y)>d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y <K(s,y,\tau,z)u(\tau,z),u(s,y)>d\psi(z)d\phi(\tau)d\psi(y)d\phi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x <f(s,y),u(s,y)>d\psi(y)d\varphi(s) \qquad (2)$$

На основании леммы 1 первое слагаемое левой части системы (2) преобразуется к следующему виду

$$\int_0^t\int_0^x <A(s,y)\psi_y(y)u_{\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)=\frac{1}{2}\int_0^t <A(s,x)\psi_y(y)u(s,x),u(s,x)>d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <A_{\psi(y)}(s,y)\psi_y(y)u(s,y),u(s,y)>d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3)$$

Аналогично для второго слагаемого получаем

$$\int_0^t\int_0^x <B(s,y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)}(s,y),u(s,y)>d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^x <B(t,y)\varphi_s(s)u(t,y),u(t,y)>d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <B_{\varphi(s)}(s,y)\varphi_s(s)u(s,y),u(s,y)>d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (4)$$

Преобразуем четвертое слагаемое в левой части соотношения (2). Используя формулу интегрирования по частям и формулу Дирихле, получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)u(\tau,y),u(s,y) > d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) = -\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)}\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)d\varphi(\tau),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) = \int_0^t\int_0^x < M(s,y,0)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right),$$

$$u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right),u(s,y) > \times\times d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t < M(t,y,0)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right),\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi) > d\psi(y) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_{\varphi(s)}(s,y,0)\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi) >$$

$$d\psi(y)d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(\tau) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (5)$$

Аналогично получим для пятого слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)u(s,z),u(s,y) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s) = \frac{1}{2}\int_0^t < N(s,x,0)\int_0^x u(s,\nu)d\psi(\nu),$$

$$\int_0^x u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\varphi(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_{\psi(y)}(s,y,0)\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > \times$$

$$\times d\psi(y)d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_{\psi(z)}(s,x,z)\int_z^x u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_z^x u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(z)d\varphi(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (6)$$

Для преобразования пятого слагаемого соотношения (2) используем лемму 2. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)u(\tau,z),u(s,y) > d\psi(z)d\psi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) = \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial\varphi(\tau)\partial\psi(z)}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\phi(\xi)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),u(s,y) > d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) +$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\psi(z)}(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),u(s,y) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s) +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right),u(s,y) > d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (7)$$

Далее, используя лемму 3 и формулу Дирихле, из последнего соотношения получим

$$\int_0^t\int_0^x < \int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u(\tau,z),u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau) > d\psi(y)d\varphi(s) = \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_{\varphi(s)}(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\times$$

$$\times d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(s) - \frac{1}{2}\int_0^x < K_{\psi(y)}(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(y) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)\times$$

$$d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(s) - \int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)),\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(y)d\varphi(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < K_{\varphi(\tau)}(t,x,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,x,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)d\varphi(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\psi(y)}(t,y,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(\tau) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)\times$$

$$\times d\psi(y)d\varphi(s) - \int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_0^y u(s,\nu)d\nu > d\varphi(\tau)d\varphi(y)d\varphi(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x < K_{\psi(z)}(t,x,0,z)\int_0^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\psi(z)\varphi(s)}(s,x,0,z)\int_0^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\varphi(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y < K_{\varphi(s)\psi(y)}(t,y,0,z)\int_0^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\psi(y) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > \times$$

$$d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s) - \int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\psi(z)}(s,y,0,z)\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_z^y u(s,y)d\psi(\nu) > \times$$

$$d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\varphi(\tau) - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(t,y,\tau,z)$$

$$\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)> d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\varphi(\tau)\times$$

$$\times d\psi(z)d\varphi(s)-\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)> d\psi(z)d\varphi(\tau)\times$$

$$\times d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)> d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) \qquad (8)$$

Учитывая соотношения (3), (4), (5), (6), (7), (8), условия г) и формулу Дирихле, из (2) имеем

$$\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)> d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x < \left\{C(s,y)-\frac{1}{2}\left[A_{\psi(y)}(s,y)\psi_y(y)+B_{\varphi(s)}(s,y)\varphi_s(s)\right]\right\}u(s,y),u(s,y)> d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < A(s,x)\psi_x(x)u(s,x),u(s,x)> d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^x < B(t,y)\varphi_t(t)u(t,y),u(t,y)> d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x < M(t,y,0)\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)> d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < N(s,x,0)\int_0^x u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_0^x u(s,\nu)d\psi(\nu)> d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_{\psi(z)}(s,x,z)\int_z^x u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_z^x u(s,\nu)d\psi(\nu)> d\psi(z)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)> d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left[< M_{\varphi(s)}(s,y,0)\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)> +\right.$$

$$+2 < K(s,y,0,0)\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu)> +$$

$$\left.+ < N_{\psi(y)}(s,y,0)\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu)>\right]d\psi(y)d\varphi(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\left\{<\frac{1}{y}M_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\times\right.$$

$$\times\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)> +2 < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)> +$$

$$\left.+ <\frac{1}{s}N_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu),\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)>\right\}d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$\frac{1}{2}<K(t,x,0,0)\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi),\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)>-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t<K_{\varphi(s)}(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)\,,\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x<K_{\psi(y)}(t.y,0,0)\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)>d\varphi(s),$$

$$,\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<K_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\psi(z)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y<K_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)>\times$$

$$\times d\psi(z)\,d\psi(y)\,d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s<K_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi),$$

$$\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)>d\varphi(\tau)\,d\psi(z)\,d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<K_{\psi(z)\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\times$$

$$\times\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)>d\psi(z)\,d\varphi(\tau)\,d\psi(y)\,d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x<f(s,y),u(s,y)>d\psi(y)\,d\varphi(s). \qquad (9)$$

В силу условий а), б), в), г) и д), из (9) имеем

$$\int_0^t\int_0^x<P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\alpha\int_0^t\int_0^x\|u(s,y)\|^2\,d\psi(y)d\varphi(s)\le\int_0^t\int_0^x<P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x<\left\{\tilde{N}(s,y)-\frac{1}{2}\left[A_{\psi(y)}(s,y)\psi_y(y)+B_{\varphi(s)}(s,y)\varphi_s(s)\right]\right\}u(s,y),u(s,y)>$$

$$d\psi(y)d\varphi(s)\le\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|\|u(s,y)\|d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (10)$$

Отсюда получаем $\int_0^t\int_0^x<P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)\le$

$$\le\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|\|u(s,y)\|d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y) > d\varphi(s)d\psi(y) \le$$

$$\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)\left[\left(\frac{1}{2}\left\|u_{\varphi\psi}(s,y)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u(s,y)\right\|^2\right)\right]d\varphi(s)d\psi(y)$$

$$\int_0^t\int_0^x < f(s,y),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 d\psi(y)d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\|u(s,y)\right\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

с учетом этого из (10) имеем

$$\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)\left[\left(\frac{1}{2}\left\|u_{\varphi\psi}(s,y)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u(s,y)\right\|^2\right)\right]d\varphi(s)d\psi(y) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 d\psi(y)d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\|u(s,y)\right\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

Отсюда в силу условия а) и (f') имеем

$$\int_0^t\int_0^x \psi_y(y)\varphi_s(s)(P(s,y)-1)\left\|u(s,y)\right\|^2 d\varphi(s)d\psi(y) \le \le \int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$\int_0^t\int_0^x \left\|u(s,y)\right\|^2 d\varphi(s)d\psi(y) \le \frac{1}{\beta}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

Из последнего неравенства, переходя к пределу при $t \to \infty$ и $x \to \infty$ получим

$$\left\|u(t,x)\right\|_{L^{2,n}_{\phi\psi}(G)} = \int_0^\infty\int_0^\infty \left\|u(s,y)\right\|^2 d\psi(y)\,d\varphi(s) \le \frac{1}{\beta}\int_0^\infty\int_0^\infty \left\|f(s,y)\right\|^2 d\psi(y)\,d\varphi(s) = \frac{1}{\beta}\left\|f(t,x)\right\|_{L^{2,n}_{\varphi\psi}(G)}$$

.

Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно- возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. - 352 с.
2. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, 1 (Бишкек, 2001).
3. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. КГНУ. –Бишкек, 2001. -Вып. 6. – С. 80-84.
4. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вест. ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук. – Ош. 2003. –Вып. 7. – С. 35-40.
5. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, 2 (Бишкек, 2002).
6. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, 4 (Бишкек, 2003).

Рецензент д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.