

Бакирова Э.М.

**ТРИВИАЛДУУ ЭМЕС ТОПОЛГИЯЛУУ АСТРОФИЗИКАЛЫК
КОНФИГУРАЦИЯЛАРДЫН ТУРУКТУУЛУГУ**

Бакирова Э.М.

**УСТОЙЧИВОСТЬ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ С
НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ**

E.M.Bakirova

**STABILITY OF ASTROPHYSICAL CONFIGURATION WITH NONTRIVIAL
TOPOLOGY**

УДК: 551.526

Выполнен анализ линейной стабильности гравитирующей конфигурации, состоящей из кротовой норы, заполненной идеальной политропной нейтронной жидкостью. Кротовая нора моделируется духовым скалярным полем с четверичной потенциальной энергией. Показана неустойчивость как чисто кротовой норы (без нейтронной жидкости), так и смешанной системы.

Идеалдуу политропиялуу нейтрондук суюктук менен толтурулган кроттук нордон түзүлүп гравитациялоочу конфигурациянын сызыктуу стабилдүүлүгүн анализдөө иши аткарылды. Кроттук нора төрттөн бир потенциалдык энергиялуу скалярдык талаа аркылуу моделдештирилет. Таза (нейтрондук суюктуксуз) жана ошондой эле аралаш системалуу кроттук норанын стабилдүү эместиги көргөзүлдү.

A linear stability analysis of gravitating configuration consisting of a wormhole filled by an ideal polytropic neutron fluid is performed. The wormhole is modeled by a ghost scalar field with quartic potential energy. It was shown that both pure wormhole (without the neutron fluid) and mixed system are unstable.

1. Введение

Простейшие конфигурации с нетривиальной топологией типа кротовой норы получаются с использованием безмассового скалярного поля [1, 2]. Хотя первые исследования стабильности (см., например, работу [3]) не выявили неустойчивых мод, недавние исследования показали, что эти конфигурации являются линейно [4, 5] и нелинейно [6, 7] неустойчивыми. Причина такого несогласия в получаемых результатах связана с тем, что в отличие от работы [3] в статьях [4-6] рассматриваются возмущения, не затухающие в горловине. В этом случае получающееся уравнение типа Шредингера, используемое для анализа стабильности, содержит сингулярности в соответствующем эффективном потенциале, что не позволяет выполнить полный анализ возмущений во всем пространстве. Один из путей решения этой проблемы, использованный в работах [4-6], состоит в регуляризации эффективного потенциала и решении полученного регуляризованного уравнения типа Шредингера.

Здесь мы выполним анализ линейной стабильности полученных нами в статье [8] статических решений с потенциалом четвертого порядка. Ранее для этого случая было показано [9], что решения являются стабильными относительно специального типа линейных возмущений, когда осцилляции радиуса горловины не учитываются. Здесь мы снова проанализируем стабильность этих решений, но уже допуская возможность колебаний горловины.

После этого мы рассмотрим стабильность смешанных систем “звезда плюс кротовая нора”, в которых помимо духового скалярного поля также присутствует политропная жидкость. Положительным моментом для наших исследований является то, что при рассмотрении модели с потенциалом ϕ^4 как фоновые статические решения, так и возмущения затухают экспоненциально быстро [9].

2. Общие уравнения

Следуя [8], мы рассматриваем модель гравитирующего духового скалярного поля в

присутствии идеальной жидкости. Лагранжиан для этой системы выбираем в виде

$$L = -\frac{\sigma^4}{16\pi G} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) + L_m, \quad (1)$$

Здесь φ есть духовое скалярное поле с потенциалом $V(\varphi)$, а L_m – лагранжиан идеальной изотропной жидкости (т.е. жидкости, у которой радиальное давление равно тангенциальному), имеющий форму $L_m = p$ [10, 11]. Используя этот лагранжиан, соответствующий тензор энергии-импульса может быть представлен как

$$T_i^k = (\varepsilon + p)u_i u^k - \delta_i^k p - \partial_i \varphi \partial^k \varphi - \delta_i^k \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (2)$$

где ε и p есть плотность энергии и давление жидкости, а u^i – ее 4-скорость.

Будем рассматривать сферически-симметричные возмущения исследованных в работе [8] равновесных конфигураций. При выводе системы уравнений на возмущения мы будем пренебрегать всеми величинами второго и более высокого порядка малости.

Метрика пространства-времени может быть взята в общей форме

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} d\Omega^2, \quad (3)$$

где ν, λ и μ есть функции только от радиальной координаты r и временной координаты $x^0 = ct$, а $d\Omega^2$ – метрика на единичной 2-сфере.

Для получения тензора энергии-импульса жидкости нам нужны компоненты 4-скорости, записанные в метрике (3) [12]:

$$u^0 = e^{-\nu/2}, \quad u_0 = e^{\nu/2}, \quad u^1 = e^{-\nu/2} v, \quad u_1 = -e^{\lambda/2} e^{-\nu/2} v,$$

с 3-скоростью

$$v = \frac{dr}{dx^0} \ll 1.$$

Индекс 0 у метрических функций означает статические решения уравнений Эйнштейна. Тогда компоненты тензора энергии-импульса (2) примут вид

$$T_0^0 = \varepsilon - \frac{1}{2} e^{-\nu} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \varphi'^2 + V(\varphi), \quad (4)$$

$$T_1^1 = -p + \frac{1}{2} e^{-\nu} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \varphi'^2 + V(\varphi), \quad (5)$$

$$T_0^1 = (\varepsilon + p)u_0 u^1 - \partial_0 \varphi \partial^1 \varphi = (\varepsilon_0 + p_0)v + e^{-\lambda} \dot{\varphi} \varphi', \quad (6)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -p + \frac{1}{2} e^{-\nu} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \varphi'^2 + V(\varphi). \quad (7)$$

В этих выражениях штрих и точка означают дифференцирование по r и x^0 соответственно.

Рассмотрим теперь возмущения статических решений. Обозначим через y любую из функций $\nu, \lambda, \mu, \varepsilon, p$ или φ . Будем полагать, что y имеет вид

$$y = y_0 + y_p, \quad (8)$$

где индекс 0, как и прежде, относится к статическим решениям, а индекс p – к возмущениям. Подставляя эти выражения в (3), (4) и (5) компоненты уравнений Эйнштейна, записанных в метрике (3),

$$G_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{1}{2} \mu' \lambda' \right) + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\mu}^2 + 2\dot{\mu} \dot{\lambda}) + e^{-\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0, \quad (9)$$

$$G_1^1 = -\frac{1}{4} e^{-\lambda} (\mu'^2 + 2\mu' \nu') + e^{-\nu} \left(\mu - \frac{1}{2} \dot{\mu} \nu + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) + e^{-\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_1^1, \quad (10)$$

$$G_2^2 = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (\lambda' \mu' - 2\mu'' - \mu'^2 - \nu' \mu' + \lambda' \nu' - 2\nu'' - \nu'^2) + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\lambda \dot{\mu} + \dot{\mu}^2 - \nu \dot{\mu} + 2\dot{\mu} - \lambda \dot{\nu} + 2\dot{\lambda} + \dot{\lambda}^2) = \frac{8\pi G}{c^4} T_2^2, \quad (11)$$

получим линейные по y_p уравнения

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda_0} \left[\mu_p'' + \frac{3}{2} \mu_0' \mu_p' - \frac{1}{2} (\mu_0' \lambda_p' + \lambda_0' \mu_p') - \lambda_p \left(\mu_0'' + \frac{3}{2} \mu_0'^2 - \frac{1}{2} \mu_0' \lambda_0' \right) \right] + e^{-\mu_0} \mu_p \\ & = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[\varepsilon_p - e^{-\lambda_0} \varphi_0' \left(\varphi_p' - \frac{1}{2} \varphi_0' \lambda_p' \right) + V_p \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{-\lambda_0} \left[(\nu_p' + \mu_p') \mu_0' + \nu_0' \mu_p' - \lambda_p \left(\frac{1}{2} \mu_0'^2 + \mu_0' \nu_0' \right) \right] - e^{-\nu_0} \mu_p + e^{-\mu_0} \mu_p \\ & = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[-p_p + e^{-\lambda_0} \varphi_0' \left(\varphi_p' - \frac{1}{2} \varphi_0' \lambda_p' \right) + V_p \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \mu_p'' + \nu_p'' + \mu_0' \left(\mu_p' + \frac{1}{2} \nu_p' - \frac{1}{2} \lambda_p' \right) + \nu_0' \left(\frac{1}{2} \mu_p' - \frac{1}{2} \lambda_p' + \nu_p' \right) \\ & - \lambda_p \left[\mu_0'' + \nu_0'' + \frac{1}{2} (\mu_0'^2 + \nu_0'^2 + \mu_0' \nu_0') \right] \\ & - e^{-\nu_0} (\mu_p + \nu_p) = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(-p_p - e^{-\lambda_0} \varphi_0' \left(\varphi_p' - \frac{1}{2} \varphi_0' \lambda_p' \right) + V_p \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $V_p = [\partial_\varphi V]_0 \varphi_p$. Далее, из (1-0) компоненты уравнений Эйнштейна

$$G_0^1 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} [2\mu' - \lambda\mu' + \mu(\mu' - \nu')] = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^1$$

имеем

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda_0} [2\mu_p' - \lambda_p \mu_0' + \mu_p (\mu_0' - \nu_0')] = \frac{8\pi G}{c^4} [(\varepsilon_0 + p_0)v + e^{-\lambda_0} \phi_p \varphi_0']. \quad (15)$$

Введем теперь “лагранжево смешение” ζ по отношению к x^0 [12]:

$$v = \frac{\partial \zeta}{\partial x^0}.$$

Тогда уравнение (15) может быть проинтегрировано, давая

$$\lambda_p = \mu_p + \frac{2}{\mu_0'} \left\{ \mu_p' - \frac{1}{2} \mu_p \nu_0' - \frac{8\pi G}{c^4} e^{\lambda_0} [(\varepsilon_0 + p_0)\zeta + e^{-\lambda_0} \varphi_0' \phi_p] \right\}. \quad (16)$$

В свою очередь, $i = 1$ компонента закона сохранения энергии-импульса, $T_{0k}^k = 0$, дает

$$\frac{\partial T_1^0}{\partial x^0} + \frac{\partial T_1^1}{\partial r} + \frac{1}{2} (\nu + \lambda + 2\mu) T_1^0 + \frac{1}{2} (T_1^1 - T_0^0) \nu' + \mu' \left[T_1^1 - \frac{1}{2} (T_2^2 + T_3^3) \right] = 0. \quad (17)$$

Подставляя сюда компоненты (4)-(7), найдем

$$\begin{aligned} & -e^{\lambda_0 - \nu_0} [(\varepsilon_0 + p_0)v + e^{-\lambda_0} \varphi_0' \phi_p] - \frac{\partial p_p}{\partial r} + \frac{\partial V_p}{\partial r} \\ & + e^{-\lambda_0} \left\{ (\varphi_0'' - \lambda_0' \varphi_0') (\varphi_p' - \frac{1}{2} \varphi_0' \lambda_p') + \varphi_0' \left[\varphi_p'' - \frac{1}{2} (\varphi_0'' \lambda_p' + \varphi_0' \lambda_p'') \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2} (\varepsilon_p + p_p) \nu_0' - \frac{1}{2} (\varepsilon_0 + p_0) \nu_p' \\ & + e^{-\lambda_0} \left[\frac{1}{2} \varphi_0'^2 \nu_p' + \varphi_0' \left(\varphi_p' - \frac{1}{2} \varphi_0' \lambda_p' \right) \nu_0' \right] + e^{-\lambda_0} \varphi_0' \left[\varphi_0' \mu_p' + 2\mu_0' \left(\varphi_p' - \frac{1}{2} \varphi_0' \lambda_p' \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Возмущенное уравнение на скалярное поле находится из общего уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = \frac{dV}{d\varphi}. \quad (19)$$

В итоге в линейном приближении имеем

$$\begin{aligned} & \varphi_p'' - e^{\lambda_0 - \nu_0} \phi_p + \frac{1}{2} (\nu_0' - \lambda_0' + 2\mu_0') \varphi_p' + \frac{1}{2} (\nu_p' - \lambda_p' + 2\mu_p') \varphi_0' \\ & = -e^{\lambda_0} \left\{ \varphi_p \left[\frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_0} + \lambda_p \left[\frac{dV}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_0} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, у нас имеется система пяти общих линейных уравнений (12), (13), (16), (18) и (20) на возмущения $\theta_p, \nu_p, \lambda_p, \mu_p$ и φ_p .

3. Потенциал четвертого порядка

Воспользуемся полученной системой уравнений для исследования стабильности статических решений, рассмотренных в [8]. В этом случае потенциал V задается выражением (здесь мы использовали отличное от [8] обезразмеривание)

$$\tilde{V} = -\tilde{V}(0)(1 - \Lambda^2 \phi^2)^2, \quad (21)$$

где m_ϕ, f - размерные константы, $\Lambda^2 = f^2 c^4 / (8\pi G)$ - безразмерная константа, а $\tilde{V}(0) = (m_\phi / f)^2 / (2\phi_1^2)$ - значение потенциала в локальном минимуме, где $\phi_{min} = 0$. Здесь ϕ_1 есть производная скалярного поля в горловине, квадрат которой соответствует "кинетической" энергии скалярного поля.

Выбирая, как и прежде, уравнение состояния нейтронной жидкости в политропной форме

$$p = K \rho_{bc}^{1+1/n} \theta^{n+1}, \quad s = (\rho_{bc} c^2 + n K \rho_{bc}^{1+1/n} \theta) \theta^n, \quad (22)$$

можно найти возмущенные компоненты давления v_p и плотности энергии ε_p :

$$v_p = K(n+1) \rho_{bc}^{1+1/n} \theta_0^n \theta_p, \quad \varepsilon_p = n \rho_{bc} c^2 \left[\frac{1}{\theta_0} + \sigma(n+1) \right] \theta_0^n \theta_p. \quad (23)$$

Здесь, как и в [8], используется новая переменная θ введенная как

$$\rho_b = \rho_{bc} \theta^n, \quad (24)$$

где ρ_{bc} есть плотность нейтронной жидкости в горловине кротовой норы. В свою очередь, статические компоненты есть

$$p_0 = K \rho_{bc}^{1+1/n} \theta_0^{n+1}, \quad \varepsilon_0 = \rho_{bc} c^2 (1 + \sigma n \theta_0) \theta_0^n. \quad (25)$$

Для выполнения анализа стабильности предположим, что возмущения имеют следующую гармоническую зависимость от времени:

$$v_p(x^0, \xi) = \tilde{v}_p(\xi) e^{i\omega x^0}, \quad (26)$$

где функции $\tilde{v}_p(\xi)$ зависят только от пространственной координаты ξ . В дальнейшем, для удобства записи формул, мы отбрасываем черту.

Рассмотрим теперь свободу выбора калибровки для нашей задачи. Во-первых, у нас есть свобода в выборе радиальной координаты r . Здесь мы ее выбираем так, что $\lambda_0 = 0$. Во-вторых, мы можем сделать соответствующую калибровку возмущений метрики v_p, λ_p, μ_p . В частности, можно наложить определенное соотношение на эти возмущения. Мы сделаем это, исходя из формы уравнения на возмущение скалярного поля (20), которое содержит слагаемое $(v_p^i - \lambda_p^i + 2\mu_p^i) \phi_0^i$. Это уравнение значительно упростится при выборе калибровки

$$v_p - \lambda_p + 2\mu_p = 0 \Rightarrow v_p = \lambda_p - 2\mu_p.$$

Далее, перепишем общие уравнения (12), (13), (16), (18) и (20) с таким выбором калибровок, что позволяет нам избавиться от возмущения v_p в этой системе уравнений. Используя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{L}, \quad \Sigma = \frac{R}{L}, \quad \Phi(\xi) = \frac{\sqrt{8\pi G}}{c^2} \phi(r), \quad \text{где } L = \frac{c^2}{\sqrt{8\pi G \phi_1^2}}, \quad (27)$$

где $R = \phi^{n/2}$, уравнение (20) дает

$$\phi_p'' + \frac{1}{2}(v_0' + 2\mu_0')\phi_p' + \omega^2 e^{-v_0} \phi_p = -4\Lambda^2 \tilde{\nu}(0) [(1 - 3\Lambda^2 \phi_0^2)\phi_p + (1 - \Lambda^2 \phi_0^2)\phi_0 \lambda_p], \quad (28)$$

где мы ввели новую безразмерную частоту $\bar{\omega} = \omega L$ и снова отбросили черту для упрощения записи формул.

Уравнения (12) и (14) дают, соответственно,

$$\begin{aligned} & \mu_p'' + \frac{1}{2}\mu_0'(3\mu_p' - \lambda_p') - (\mu_0'' + \frac{3}{2}\mu_0'^2)\lambda_p + e^{-\mu_0}\mu_p \\ & = -\left\{nB\left[\frac{1}{\theta_0} + \sigma(n+1)\right]\theta_0^n \theta_p - \phi_0' \left(\phi_p' - \frac{1}{2}\phi_0' \lambda_p'\right) + 4\Lambda^2 \tilde{\nu}(0)(1 - \Lambda^2 \phi_0^2)\phi_0 \phi_p\right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_p'' - \mu_p'' + \frac{1}{2}v_0'(\lambda_p' - 3\mu_p') - \lambda_p \left[\mu_0'' + v_0'' + \frac{1}{2}(\mu_0'^2 + v_0'^2 + \mu_0'v_0')\right] + \omega^2 e^{-v_0}(\mu_p + \lambda_p) \\ & = -2\left[-B\sigma(n+1)\theta_0^n \theta_p - \phi_0' \left(\phi_p' - \frac{1}{2}\phi_0' \lambda_p'\right) + 4\Lambda^2 \tilde{\nu}(0)(1 - \Lambda^2 \phi_0^2)\phi_0 \phi_p\right], \end{aligned} \quad (30)$$

а уравнение (18) сводится к

$$\begin{aligned} & \omega^2 e^{-v_0} \{B\theta_0^n [1 + \sigma(n+1)\theta_0]\psi + \phi_0' \phi_p\} - B\sigma(n+1) \frac{d}{d\xi} (\theta_0^n \theta_p) + \frac{d\mu_p}{d\xi} \\ & + \phi_0'' \left(\phi_p' - \frac{1}{2}\phi_0' \lambda_p'\right) + \phi_0' \left[\phi_p'' - \frac{1}{2}(\phi_0'' \lambda_p' + \phi_0' \lambda_p'')\right] - \frac{1}{2}B\theta_0^n \left[\frac{n}{\theta_0} + \sigma(n+1)^2\right] \theta_p v_0' \\ & - \frac{1}{2}B\theta_0^n [1 + \sigma(n+1)\theta_0] (\lambda_p' - 2\mu_p') + \frac{1}{2}\phi_0'^2 (\lambda_p' - 2\mu_p') \\ & + v_0' \phi_0' \left(\phi_p' - \frac{1}{2}\phi_0' \lambda_p'\right) + \phi_0' \left[\phi_0' \mu_p' + 2\mu_0' \left(\phi_p' - \frac{1}{2}\phi_0' \lambda_p'\right)\right] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\frac{d\mu_p}{d\xi} = 4\Lambda^2 \tilde{\nu}(0) [(1 - 3\Lambda^2 \phi_0^2)\phi_0' \phi_p + (1 - \Lambda^2 \phi_0^2)\phi_0 \phi_0']$$

Отметим, что мы можем исключить ψ из уравнения (31), заменяя фигурные скобки соответствующим выражением из уравнения связи

$$2\mu_p' + (\mu_0' - v_0')\mu_p - \mu_0' \lambda_p - 2\{B\theta_0^n [1 + \sigma(n+1)\theta_0]\psi + \phi_0' \phi_p\} = 0, \quad (32)$$

которое получается из (16). Здесь $\psi = \zeta/L$ есть безразмерное лагранжево смещение.

Второе уравнение связи следует из (13), и имеет вид

$$\begin{aligned} & \mu_0'(\lambda_p' - \mu_p') + v_0' \mu_p' - \lambda_p \left(\frac{1}{2}\mu_0'^2 + \mu_0' v_0'\right) + 2(\omega^2 e^{-v_0} + e^{-\mu_0})\mu_p \\ & - 2\left[-B\sigma(n+1)\theta_0^n \theta_p + \phi_0' \left(\phi_p' - \frac{1}{2}\phi_0' \lambda_p'\right) + 4\Lambda^2 \tilde{\nu}(0)(1 - \Lambda^2 \phi_0^2)\phi_0 \phi_p\right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, для четырёх функций $\phi_p, \lambda_p, \mu_p, \theta_p$ у нас имеется система уравнений (28)-(31), которую мы будем использовать для исследования стабильности. Для этой системы мы выберем следующие граничные условия при $\xi = 0$:

$$\lambda_p(0) = \lambda_{p0}, \quad \mu_p(0) = \mu_{p0}, \quad \theta_p(0) = \theta_{p0}, \quad \phi_p(0) = 0, \quad \phi_p'(0) = \phi_{p1}, \quad (34)$$

где $\lambda_{p0}, \mu_{p0}, \theta_{p0}$ есть четные функции, а ϕ_{p1} – нечетная. Значение ϕ_{p1} получается из уравнения (33):

$$\phi_{p1} = B\sigma(n+1)\theta_{p0} + \frac{1}{2}\lambda_{p0} - \left(\omega^2 e^{-v_0} + \frac{1}{2\mu_0}\right)\mu_{p0}$$

Таким образом, система содержит три свободных параметра: λ_{p0}, μ_{p0} и θ_{p0} . Их значения выбираются так, чтобы удовлетворить следующим условиям: (i) На границе жидкости, $\xi = \xi_b$, значение θ_p должно оставаться конечным для того, чтобы p_p [см. уравнение (23)]

удовлетворяло условию $p_p = 0$ на границе {см., например, уравнение (60) из работы [12]}. (ii) Асимптотически при $\xi \rightarrow \pm\infty$ возмущения λ_p, μ_p, ϕ_p должны стремиться к нулю. В этой связи удобно определить асимптотическое поведение решений. Это можно сделать в аналитическом виде следующим образом:

(А): Статические решения:

$$\begin{cases} \phi_0 \rightarrow 1/\Lambda - C_1 \exp \left[-\sqrt{8\Lambda^2 \tilde{V}(0)} \xi \right] / \xi; \\ \Sigma_0 \rightarrow \xi, \quad \Sigma'_0 \rightarrow 1 - C_2/\xi; \\ e^{\nu_0} \rightarrow 1 - 2C_2/\xi. \end{cases}$$

(В): Возмущения:

$$\begin{cases} \phi_p \rightarrow C_3 \exp \left(-\sqrt{-\beta^2} \xi \right) / \xi; \\ \mu_p \rightarrow C_4 \exp \left(-\sqrt{-\omega^2} \xi \right); \\ \lambda_p \rightarrow -C_4 \sqrt{-\omega^2} \xi \exp \left(-\sqrt{-\omega^2} \xi \right). \end{cases}$$

Здесь $\beta^2 = \omega^2 - 8\Lambda^2 \tilde{V}(0)$, а C_i есть константы интегрирования. Следовательно, для получения затухающих решений на возмущение скалярного поля ϕ_p параметр β^2 должен быть отрицательным. Учитывая, что в нашем случае $\tilde{V}(0)$ всегда положительна, это означает, что должно выполняться условие $\omega^2 < 8\Lambda^2 \tilde{V}(0)$.

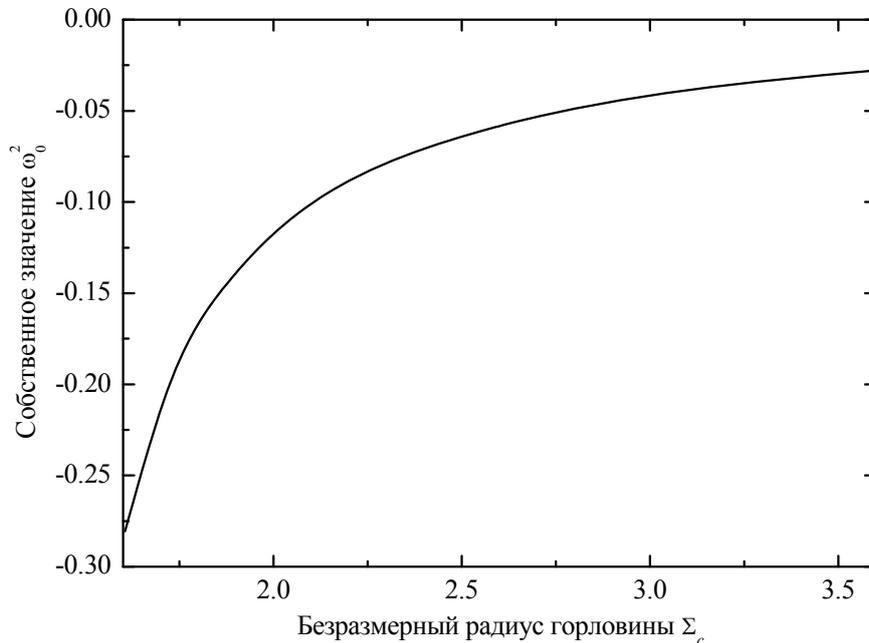


Рисунок 1– Случай без жидкости: наименьшее собственное значение ω_0^2 показано как функция радиуса горловины Σ_c . По мере роста Σ_c , $\omega_0^2 \rightarrow -0$.

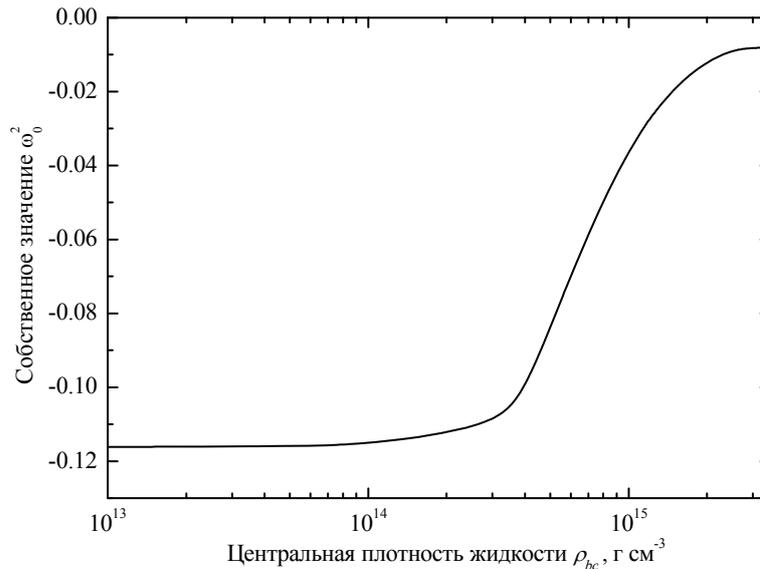


Рисунок 2 – Случай с жидкостью: наимизшее собственное значение ω_0^2 показано как функция центральной плотности $\rho_{жс}$ (для $L=10$ км и $\Lambda = 1$). Когда $\rho_{жс} = 0$ (т.е. без жидкости), $\omega_0^2 \approx -0.11610638$.

Перейдем теперь к рассмотрению результатов численных расчетов. Система уравнений (28)-(31) совместно с граничными условиями (34) определяет задачу на собственные значения ω^2 . При этом вопрос стабильности сводится к исследованию возможных значений ω^2 . Если какое-либо значение ω^2 получится отрицательным, то возмущения будут расти, и рассматриваемые конфигурации будут нестабильны относительно радиальных колебаний.

Результаты расчетов собственных значений ω_0^2 показаны на рисунках 1 и 2. На рисунке 1 представлена зависимость ω_0^2 от безразмерного радиуса горловины Σ_c для решений типа кротовой норы без обычной материи. Этот случай соответствует задаче, исследованной в работе [9]. Таким образом, мы показываем, что собственное значение ω_0^2 отрицательно при любом размере горловины. Т.е. все решения типа кротовой норы являются линейно нестабильными. Этот результат отличается от проведенных ранее ограниченных исследований стабильности, когда не учитывались осцилляции радиуса горловины.

На рисунке 2 представлены результаты наших расчетов для случая, когда в системе присутствует жидкость, т.е. для смешанных систем “звезда плюс кротовая нора”. Здесь собственное значение ω_0^2 показано как функция центральной плотности жидкости $\rho_{жс}$. В качестве фоновых решений мы использовали статические решения, полученные в статье [8]. Начальное значение $\mu_p(0)$ в (34) выбиралось как $\mu_{p0} = 1$, а значения λ_{p0} и θ_{p0} подбирались таким образом, чтобы решения выходили на асимптотики, представленные в (В). Из рисунка 2 видно, что квадрат собственной частоты остается всегда отрицательным, независимо от $\rho_{жс}$. Таким образом, рассмотренные здесь системы “звезда плюс кротовая нора” всегда являются нестабильными относительно линейных возмущений.

4. Заключение и перспективы дальнейших исследований

Мы исследовали вопрос линейной стабильности статических смешанных конфигураций из нашей предыдущей работы [8]. Нетривиальная топология пространства-времени здесь обеспечивается скалярным полем с потенциалом четвертого порядка. Такой выбор потенциала основывался на желании получить стабильные решения.

Для удобства проведения анализа стабильности таких смешанных систем, мы выбирали такие значения параметров, при которых основная масса конфигураций (более чем 99%) сконцентрирована в радиусе, соответствующем краю жидкости. В этом случае мы показали,

что квадрат наименьшей собственной частоты возмущений всегда является отрицательным. Это означает, что рассмотренные здесь системы типа “звезда плюс кротовая нора” нестабильны относительно линейных возмущений. Кроме того, сами по себе кротовые норы (т.е. решения без обычной материи) являются также нестабильными. Поэтому, судя по всему, причина нестабильности кроется именно в наличии в наших смешанных конфигурациях кротовых нор.

Для получения стабильных смешанных систем необходимо стартовать сразу со стабильных кротовых нор. Одной из возможностей здесь является выход за рамки гравитации Эйнштейна и включение в систему добавок более высокого порядка по инвариантам кривизны [13, 14]. Для существования таких решений уже нет необходимости в использовании экзотической материи.

В случае статических решений, рассмотренных здесь, духовое скалярное поле асимптотически стремится в каждой из вселенных к различным вакуумным значениям, задаваемым двумя вырожденными минимумами потенциала. Поэтому скалярное поле имеет форму кинка [15], если рассматривать его зависимость от радиальной координаты. Аналогичное поведение имеет место и в случае смешанных конфигураций, рассмотренных в [16, 17], когда асимптотически безмассовое духовое скалярное поле имеет равные по модулю, но противоположные по знаку значения.

Другая интересная возможность состоит в рассмотрении решений типа кротовых нор, которые образованы двумя взаимодействующими духовыми скалярными полями. Пример таких решений представлен в работе [18]. Там предполагается, что скалярные поля имеют одинаковые асимптотические значения в обеих вселенных. В дальнейшем мы планируем выполнить анализ стабильности для таких решений.

Литература

- [1] Bronnikov K. A. Scalar-tensor theory and scalar charge // *Acta Phys. Polon.* -1973.-V. B4.-P.251-266.
- [2] Ellis H. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity // *J. Math. Phys.* -1973. -V. 14. -P.104-118.
- [3] Armendariz-Picon C. On a class of stable, traversable Lorentzian wormholes in classical general relativity // *Phys. Rev.* - 2002. -V.D65:104010. - 10 p.
- [4] Gonzalez J. A., Guzman F. S. and Sarbach O. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. I. Linear stability analysis // *Classical Quantum Gravity* -2009. -V. 26:015010.-11p.
- [5] Bronnikov K. A., Fabris J. C. and Zhidenko A. On the stability of scalar-vacuum space-times // *Eur. Phys. J.* -2011. -V.C71.-P.1791-1804.
- [6] Gonzalez J. A., Guzman F. S. and Sarbach O. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. II. Nonlinear evolution // *Classical Quantum Gravity* -2009.-V.26:015011.-14 p.
- [7] Shinkai H. -a. and Hayward S. A. Fate of the first traversible wormhole: Black hole collapse or inflationary expansion // *Phys. Rev.* -2002. -V.D66:044005. -9 p.
- [8] Наука и Новые Технологии №3, Бишкек 2014, стр.34-39.
- [9] Kodama T., de Oliveira L.C.S., Santos F.C. Properties of a general-relativistic kink solution // *Phys. Rev.* -1979. -V.D19. -P.3576-3581.
- [10] Stanukovich K.P., *Soviet Physics Doklady* -1964.-V.9.-P.63.
- [11] Станюкович К.П. Неустойчивые движения сплошной среды. -М.: Наука, 1971. -855 с.
- [12] Chandrasekhar S. The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity // *Astrophys. J.* -1964.-V.140.-P.417-433.
- [13] Kanti P., Kleihaus B. and Kunz J. Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory // *Phys. Rev. Lett.* -2011.-V.107:271101. -4 p.
- [14] Kanti P., Kleihaus B. and Kunz J. Stable Lorentzian Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory // *Phys. Rev.* - 2012. -V.D85:044007. -21 p.
- [15] Rajaraman R. Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory.-North-Holland Publishing Company: Amsterdam, New York, Oxford, 1982. -409p.
- [16] Dzhunushaliev V., Folomeev V., Kleihaus B. and Kunz J. Mixed neutron star-plus-wormhole systems: Equilibrium configurations // *Phys. Rev.* -2012. -V.D85:124028. -14 p.
- [17] Bronnikov K. A., Konoplya R. A. and Zhidenko A. Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field // *Phys. Rev.* -2012. -V.D86:024028. -11 p.
- [18] Dzhunushaliev V. and Folomeev V. 4D static solutions with interacting phantom fields // *Int. J. Mod. Phys.* -2008. -V.D17.-P.2125-2142.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Асаналиева Г.Б.