МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Чекеев А. А. Чанбаева А. И.

БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН ТУЮК ЖАНА ЖЕТИК ЧАГЫЛДЫРУУЛАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Чекеев А. А. Чанбаева А. И.

О ЗАМКНУТЫХ И СОВЕРШЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

A.A. Chekeev., A.I. Chanbaeva

ON CLOSED AND PERFECT MAPPINGS OF UNIFORM SPACES

УДК 515.12.

Бир калыптуу мейкиндиктердин $u-$туюк жана $u-$жетик чагылдуулары аныкталынат, анын негизги касиеттери далилделинет

Определяются $u-$замкнутые и $u-$совершенные отображения, доказываются их основные свойства

$u-$closedand $u-$ perfect mappings is defined and proved its mainproperties

ВВЕДЕНИЕ

Ниже определяются равномерные аналоги замкнутых и $z-$ замкнутых отображений. Всюду используется обозначение из книги [3] и необходимая информация из книг [4],[5],[6].

З. Фроликом ([1]) введены z – замкнутые отображения, которые являются естественным обобщением замкнутых отображений ([2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1([1]). Непрерывное отображение $f: X \to Y$топологического пространства X в топологическое пространство Y называется z– *замкнутым*, если образ $f(F)$ любого функционально замкнутого (≡нуль-множества) F в X является замкнутым множеством в Y.

Каждое равномерное пространство обозначается как uX, где $\mathcal{U}$ – равномерность в терминах равномерных покрытии, $f: uX \to vY$отображение равномерного пространства uX в равномерное пространство vY и если $f(F) = Y$ что$f: uX \to vY$ - сюрьективное отображение. Через $C^*(uX)$ обозначается кольцо всех ограниченных равномерно непрерывных функций на uX, множество$\mathfrak{Z}(uX) = \{f^{-1}(0): f \in C^*(uX)\}$-множество всех равномерно нуль-множеств (≡ равномерно замкнутых множеств ([7])), а множество $\mathcal{L}(uX) = \{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}): f \in C^*(uX)\} -$ множество всех равномерно конуль - множеств (≡ равномерно открытых множеств([7])) равномерного пространства uX. Через $u_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ обозначается множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественной равномерностью $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$ порожденной метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, а через $u_I I$обозначается отрезок $I = [0,1]$ с равномерностью $\mathcal{U}_I$, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2([7]). Отображение $f: uX \to vY$ называетсяu –*непрерывным*, если $f^{-1}(F) \in \mathfrak{Z}(uX)(f^{-1}(U) \in \mathcal{L}(uX))$ для любого $F \in \mathfrak{Z}(uY)(U \in \mathcal{L}(uY))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Всякое равномерно непрерывное отображение $f: uX \to vY$ является u –непрерывным. Если $\mathcal{U}_f$и $\mathcal{V}_f$- тонкие $(\equiv fine)$ равномерности тихоновских пространств Xи Y*([3]), *соответственно, то для отображения $f: u_f X \to v_f Y$.$u_f -$ непрерывность равносильна непрерывности отображения*

$f: X \to Y$. *Существуют* u *–непрерывные отображения* $f: uX \to vY$, *которые не является равномерно непрерывным.*

ТЕОРЕМА 4 ([7]). *Пусть* $g_1^{-1}(0) = F_1 \in \mathfrak{Z}(uX)$ *и* $g_2^{-1}(0) = F_2 \in \mathfrak{Z}(uX)$, *где* $g_1, g_2 \in C^*(uX)$ *и* $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. *Тогда функция* $f: uX \to u_{\mathbb{I}}I$, *определенная как* $f(x) = |g_1(x)|/(|g_1(x)| + |g_2(x)|)$*для любых* $x \in X$, *является* u *–функцией.*

ПРИМЕР 5([7]). Пусть $X = [-1;0) \cup (0;1]$и равномерность $\mathcal{U}$на Xиндуцирована равномерностью $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$из $\mathbb{R}$. Множества $[-1;0)$ и $(0;1]$не равномерно отделены, следовательно, не существует равномерно непрерывной функции на равномерном пространстве uX отделяющей эти множества.

Функции $g_i: uX \to u_{\mathbb{R}}\mathbb{R}, i = 1,2$, определенные как $g_1(x) = \rho(x,[-1;0))$и $g_2(x) = \rho(x,(0;1])$ являются равномерно непрерывными. Тогда функция $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$есть пример u – непрерывной функции, которая не является равномерно непрерывной.

ПРИМЕР 6.([7],[3], глII, упр.10). Пусть X –локально бикомпактное тихоновское пространство и αXего одноточечная Александровская бикомпактификация. Тогда равномерность$\mathcal{U}_{\alpha}$индуцированная на Xиз бикомпактаαXявляется минимальной предкомпактной равномерностью на X.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ПРИМЕР 1. Равномерность $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$множества действительных чисел $\mathbb{R}$ порождается базой $\mathcal{B}$, состоящей из открытых равномерных покрытий вида $\alpha_\varepsilon = \{O_\varepsilon(x): x \in \mathbb{R}\}$, где $O_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ –открытый интервал с центром в точке x длины 2ε и $\varepsilon > 0, т.е. \varepsilon \in \mathbb{R}^+ = [0;+\infty)$. Пусть $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ – множество всех конечных подмножеств $\mathbb{R}$. Для любого$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ и любого $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ положим

$$\alpha_{\varepsilon,A} = \{O_\varepsilon(x): x \in X \setminus A\} \cup \{\{a\}: a \in A\}.$$

Семейство $\mathcal{B}' = \{\alpha_{\varepsilon,A}: \varepsilon \in \mathbb{R}^+, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$ –база некоторой равномерности $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}$, более сильной чем равномерность $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$.

Действительно,
$\alpha_{\varepsilon_1,A_1} \cap \alpha_{\varepsilon_2,A_2} > \alpha_{\varepsilon,A_1 \cup A_2}$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и покрытие $\alpha_{\delta,A}$ звездно вписано в покрытие $\alpha_{\varepsilon,A}$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Отметим, что $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{U}'$и $\mathcal{U}'$ – порождает на $\mathbb{R}$ –дискретную топологию.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Множество рациональных чисел* $\mathbb{Q}$*не является равномерно нуль-множеством в равномерном пространстве* $u\mathbb{R}$, *т.е.* $\mathbb{Q} \notin \mathfrak{Z}(u'\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{Q} \in \mathfrak{Z}(u'\mathbb{R})$, т.е. существует такая равномерно непрерывная функция $f \in C^*(u\mathbb{R})$, что $\mathbb{Q} = f^{-1}(0)$. Тогда для любого$n \in \mathbb{N}$найдутся $\varepsilon_n > 0$ и $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$такие, что семейство $f(\alpha_{\varepsilon_n,A_n})$вписано в покрытие $\alpha_{\frac{1}{n}}$, т.е. для любой $y \in O_{\varepsilon_n}(x)$имеем $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$для всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть$x \in \mathbb{R}$ такое число, что $x \notin A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Всилу всюду плотности $\mathbb{Q}$в $\mathbb{R}$, существует $y \in \mathbb{Q} \setminus A$,такое что$|x-y| < \varepsilon_n$, следовательно, для всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что$x \notin A$ и$|x-y| < \varepsilon_n$имеем $|f(x)| < \frac{1}{n}$для любого$n \in \mathbb{N}$, т.е. $f(x) = 0$для любых $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Итак, $\mathbb{R} \setminus A = f^{-1}(0)$, т.е. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup A$ –противоречие, т.к. $\mathbb{Q}$и A - счетные множества, а $\mathbb{R}$ - несчетно.

Утверждение доказано.

Рассмотрим функцию $h: u'\mathbb{R} \to u_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$определенную как $g(x) = 0$, если $x \in \mathbb{Q}$и $g(x) = 1$, если $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда h –непрерывная функция, которая не является u' –непрерывной функцией, т.е. $g^{-1}(0) = \mathbb{Q} \notin \mathfrak{Z}(u'\mathbb{R})$.На основании примера 6 естественно определить специальные замкнутые отображения равномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $f: uX \to vY$ называется u –*замкнутым*, если fявляется u –непрерывным и для любого замкнутого в X множества F образ $f(F)$ замкнут в Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение $f: uX \to vY$ называется z_u –*замкнутым*, если f является u –непрерывным и для любого равномерно замкнутого $F \in \mathfrak{Z}(uX)$ образ $f(F)$ замкнут в Y.

Ясно, что всякое u –замкнутое отображение является z_u –замкнутым. Имеет место простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякое u –замкнутое отображение $f: uX \to vY$ является z_u – замкнутым.*

ТЕОРЕМА 5. *Отображение $f: uX \to vY - z_u -$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждой точки $y \in Y$ и каждого равномерно конуль-множества $U \in \mathcal{L}(uX)$, содержащего $f^{-1}(y)$, т.е. $f^{-1}(y) \subset U$, существует такая открытая окрестность V точки $y \in Y$, что $f^{-1}(V) \subset U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение $f: uX \to vY - z_u$ –замкнуто и $y \in Y -$ произвольная точка и равномерно нуль-множество $U \in f(uX)$, содержащее $f^{-1}(y)$, т.е. $f^{-1}(y) \subset U$. Тогда $X \setminus U \in \mathfrak{Z}(uX)$ – является равномерно конуль-множеством и $f(X \setminus U)$ - замкнуто в Y. Множество $V = Y \setminus f(X \setminus U)$ открыто в Y и $y \in V$, т.е. V –открытая окрестность точки y. Имеем следующие вычисления:

$$f^{-1}(V) =$$
$$= f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U)) \subset X \setminus (X \setminus U) = U,$$

т.е. $f^{-1}(V) \subset U$. Условие теоремы выполнено.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы и $F \in \mathfrak{Z}(uX)$ –произвольное равномерно нуль-множество. Множество $U = X \setminus F \in \mathcal{L}(uX)$ –равномерно конуль-множество и для любого $y \in Y \setminus f(F)$ имеем $f^{-1}(y) \subset X \setminus f\left(f^{-1}(f(F))\right) \subset X \setminus F = U$. Тогда существует открытая окрестность V_y точки $y \in Y \setminus f(F)$ такая, что $f^{-1}(V_y) \subset U$. Положим $V = \cup\{V_y : y \in Y \setminus f(F)\}$. Тогда V – открыто в Y и $Y \setminus f(F) \subset V$ и $f^{-1}(V) \subset U$, т.е. $f^{-1}(V) \cap F = \emptyset$. Тогда $V \cap f(F) = \emptyset$, т.е. $V \subset Y \setminus f(F)$. Следовательно, $f(F) = Y \setminus V$, т.е. множество $f(F)$ замкнуто.

Теорема доказана.

Следующая теорема демонстрирует, когда z_u –замкнутость отображений влечет u –замкнутость.

ТЕОРЕМА 6. *Если отображение $f: uX \to vY - z_u$ –замкнуто и $f^{-1}(y)$ – линделефово для любой точки $y \in Y$, то отображение f является u –замкнутым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in Y$ - произвольная точка, $f^{-1}(y)$ – линделефово и U - произвольное открытое множество, содержащее $f^{-1}(y)$, т.е. $f^{-1}(y) \subset U$. Семейство $\mathcal{L}(uX)$ является базой топологии равномерного пространства uX ([6]), следовательно, для любой точки $x \in f^{-1}(y) \subset U$ найдется такое равномерно конуль-множество $V_x \in \mathcal{L}(uX)$, являющееся открытой окрестностью точки x, то $x \in V_x \subset U$. Тогда семейство $\{V_x : x \in f^{-1}(y)\}$ –открытое покрытие линделефова пространства $f^{-1}(y)$. Пусть $\{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ –счетное подпокрытие. Так как $V_{x_n} \in \mathcal{L}(uX)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $U' = \cup\{V_{x_n} : n \in N\}$ –равномерно конуль-множество ([7]) и $f^{-1}(y) \subset U' \subset U$. В силу z_u –замкнутости отображения $f: uX \to vY$, существует такая открытая окрестность V точки $y \in Y$, что $f^{-1}(V) \subset U' \subset U$. Тогда по одному из критериев замкнутых отображений ([2]) следует, что отображение $f: uX \to vY - u -$ замкнутое отображение.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Пусть $f: uX \to vY -$ бикомпактное u –непрерывное отображение, т.е. $f^{-1}(y)$ –бикомпактно для любого $y \in Y$. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $f: uX \to vY - z_u$ –замкнуто.

2. $f: uX \to vY - u$ –замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (1⟹2). Следует непосредственно из теоремы 11.

(2⟹1) Следует из предложения 9.

Следствие 6.1. позволяет определить специальные совершенные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Отображение $f: uX \to vY$ называется u *–совершенным*, если $f - u$ –замкнуто и бикомпактно.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Ясно, что всякое равномерно совершенное отображение ([4]) $f: uX \to vY$ является u –совершенным, а всякое u –совершенное отображение $f: uX \to vY$ является совершенным.

ПРИМЕР 9. Пусть локально X – бикомпактное тихоновское пространство и αX –его одноточечная Александровская бикомпактификафия. Пусть $\mathcal{U}_f$ –тонкая (-fine) равномерность на X, а $\mathcal{U}_\alpha$ минимальная предкомпактная равномерность на X (см.пример 6) тогда $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}_f$ и $\mathcal{U}_\alpha \neq \mathcal{U}_f$ т.к. для Самюэлевских бикомпактификации $(s_{u_f}X, s\mathcal{U}_f)$ и $(s_{u_\alpha}X, s\mathcal{U}_\alpha)$ имеем $s_{u_f}X = \beta X$ –Стоун-Чеховская бикомпактификация и $s_{u_\alpha}X = \alpha X$ – Александровская бикомпактификация. Очевидно что $\beta X \neq \alpha X$ (предполагается, что на X существует более одной равномерности). Тождественное отображение $1_x: \mathcal{U}_\alpha X \to \mathcal{U}_f X$ является топологическим гомеоморфизмом, который не является u – непрерывным отображенным. Следовательно, класс совершенных и замкнутых отображений шире класса u – совершенных и u –замкнутых отображений.

Список литературы:

1. Florik Z. Applications of complete families of continuons functions to the theory of Q-spages. – Gzech. Math. Y. 11(1961), 115-133.
2. Энгелкинг Р. Общая топология. – М.:Мир.1986.
3. Isbell J.R. Uniform spaces. – Providence,1964.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.:Наука, 1968.
5. Gillman L.,Jerison M. Rings of continuons functions. – New York, 1960.
6. Charalambons M.G. Uniform Dimenson Function. – Ph.D. dissertation. Univ. of London, 1971.

Рецензент: д.ф.-м.н., Канетов Б.Э.