Шаршенбеков М.М.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ОДНОРОДНЫХ СУММАРНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ СТРУКТУРЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

M.M.Sharshenbekov

SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM HOMOGENEOUS SUM-DIFFERENCE EQUATIONS STRUCTURE OF THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL

УДК 517. 917

В этой работе изучена разрешимость задачи Коши однородных суммарно-разностных уравнений от структуры характеристического полинома. И показано, что оригинал будет решением исходного уравнения только лишь при выполнении некоторых дополнительных условий.

In this paper we study the solvability of the Cauchy homogeneous sum-difference equations of the structure of the characteristic polynomial. And it is shown that the original is a solution of the original equation only under certain additional conditions.

Рассмотрим однородное суммарно-разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{m} a_i u(n+i) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{n-1} K_i(n-1-j)u(j+i), \quad n \geq 0, \tag{1}$$

где $u(n)$ -искомая функция; a_i -постоянные коэффициенты; $a_m = 1$, $K_i(n)$ имеет вид

$$K_i(n) = \sum_{v=1}^{m_i} Q_{iv}\lambda_{iv}^n, \; Q_{iv}, \; \lambda_{iv} = const, \tag{2}$$

$$u(i) = u_i, \quad i = \overline{0, \mu-1}; \quad \mu = \max\{m, l\} \tag{3}$$

начальные условия уравнения (1).

$$\sum_{i=0}^{m} a_i u(n+i) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \; \left(K_i(n) \equiv 0\right), \tag{4}$$

для чисто суммарно-разностного уравнения m -го порядка вида (4) в задаче Коши величины $u(i) = u_i, \; i = \overline{0, m-1}$ можно задавать произвольно. Однако, для суммарно-разностных уравнений это не всегда так.

Для исследования задачи (1), (3) применяется операторное исчисление, основанное на преобразовании вида [4]: $D\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} s^{-(n+1)} f(n)$,где s -комплексный параметр. Для D -преобразования справедливы формулы[4]:

$$D\{f(n+t)\} = s^t D\{f(n)\} - \sum_{i=0}^{t-1} s^{t-i-1} f(i)\,; D\left\{\frac{n^{(m)}}{m!}\lambda^{n-m}\right\} = \frac{1}{(s-\lambda)^{m+1}}\,; \tag{5}$$

где $n^{(m)} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1), n^{(0)} = 1$ -обобщенная степень порядка m , числа n

$$D\{f_1(n)\}\cdot D\{f_2(n)\} = D\left\{\sum_{j=0}^{n-1} f_1(n-1-j)\cdot f_2(j)\right\}. \tag{6}$$

Применяя к обеим частям (1) оператор D, получим

$$\varphi_1(s)U(s) = \psi_1(s), \tag{7}$$

где
$$\varphi_1(s) = \sum_{i=0}^{m} a_i s^i - \sum_{i=0}^{l} s^i \bar{K}_i(s)$$

$$\psi_1(s) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=j+1}^{m} a_i s^{i-j-1} u(j) - \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=j+1}^{l} s^{i-1-j} \bar{K}_i(s) u(j);$$
$$\bar{K}_i(s) \equiv D\{K_i(n)\} = \sum_{v=1}^{m_i} \frac{Q_{iv}}{s - \lambda_{iv}}; \qquad U(s) \equiv D\{u(n)\}. \tag{8}$$

В (7) $\varphi_1(s)$ и $\psi_1(s)$ являются дробно-рациональными функциями от s, что не удобно при исследовании. Избавимся от этого недостатка. Через $h(s)$ обозначим наименьший общий знаменатель дробей $1/(s - \lambda_{iv})$; $i = \overline{0, l}$, $v = \overline{1, m_i}$. В частности, если среди λ_{iv} нет совпадающих, то

$$h(s) = \prod (s - \lambda_{iv}); \quad i = \overline{0, l}, \quad v = \overline{1, m_i}. \tag{9}$$

Далее введем обозначения

$$b(s) = h(s) \sum_{i=0}^{m} a_i s^i; \qquad B(s) = h(s) \sum_{i=0}^{l} \bar{K}_i(s) s^i = \sum_{i=0}^{l} \sum_{v=1}^{m_i} Q_{iv} h_{iv}(s) s^i;$$

$$b_j(s) = h(s) \sum_{i=j+1}^{m} a_i s^{i-1-j}, \ j = \overline{0, m-1}; \qquad B_j(s) = h(s) \sum_{i=j+1}^{l} s^{i-1-j} \bar{K}_i(s), \ j = \overline{0, l-1}, \tag{10}$$

где $h_{iv}(s) = \dfrac{h(s)}{s - \lambda_{iv}}$.

В соответствии с [1], умножая обе части (7) на полином $h(s)$, получим

$$\varphi(s)U(s) = \psi(s), \tag{11}$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ будут уже полиномами и определяются по правилу

$$\varphi(s) \equiv h(s)\varphi_1(s) = b(s) - B(s); \tag{12}$$

$$\psi(s) \equiv h(s)\psi_1(s) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j(s) u(j) - \sum_{j=0}^{l-1} B_j(s) u(j). \tag{13}$$

Из (11) находим изображение искомого решения

$$U(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}, \tag{14}$$

как отношение двух полиномов. Если в (14)

$$ст.\ \psi(s) < ст.\ \varphi(s), \tag{15}$$

то возможен непосредственный переход к оригиналу. (Символ $ст.\ \varphi(s)$ обозначает степень полинома $\varphi(s)$).В дальнейшем всюду будем предполагать, что $m < l$. В этом случае, как видно из (13), (15),

$$0 \le ст.\ \varphi(s) \le M + l - 1. \tag{16}$$

Для определенности положим

$$1 \le k \le M + l\,. \tag{17}$$

Таким образом, если $m < l$, то $ст.\ \varphi(s)$ является переменной величиной, тогда как при $m \ge l$ она будет постоянной. Теперь выясним условия, при выполнении которых имеет место (17).Предварительный анализ показал, что необходимо различать следующие три случая:

1. $r \equiv l - m > k$; **2.** $r \le k \le l$; **3.** $l < k$, (18)

где k - некоторое натуральное число. Число k определяется по данному уравнению и является важной характеристикой для суммарно-разностных

уравнений. В этой работе мы рассмотрим только первый случай.

СЛУЧАЙI. Пусть $r > k$. (19)

Тогда полином $b(s)$ на величину степени полинома $\varphi(s)$ не влияет. Действительно, как видно из (10) $ст.\ b(s) = M + m \equiv M + l - r$.

Поэтому в силу (19) $M + l - r < M + l - k$.Следовательно, при $r > k$

$$ст.\ \varphi(s) = ст.\ B(s) = M + l - k\,. \tag{20}$$

Итак, для вывода условий, при которых выполняется (17), нам нужно преобразовать $B(s)$. Из формулы (5) имеем

$$s^t D\{K_i(n)\} = D\{K_i(n+t)\} + \sum_{j=1}^{t} s^{j-1} K_i(t-j)\,. \tag{21}$$

Умножая обе части (21) на $h^{(t)}(0)/t!$ и суммируя по t от 0 до M, получим

$$\sum_{t=0}^{M} s^t \frac{h^{(t)}(0)}{t!} D\{K_i(n)\} = \sum_{t=0}^{M} \frac{h^{(t)}(0)}{t!} D\{K_i(n+t)\} + \sum_{j=1}^{M} s^{j-1} K_i(t-j)\,. \tag{22}$$

Докажем, что первое слагаемое s_1, стоящее в правой части равенства (22), равно нулю. Учитывая линейность оператора D и (2) ядра $K_i(n)$, имеем

$$s_1 = \sum_{v=1}^{m_i} Q_{iv} D\{\lambda_{iv}^n\} \sum_{t=0}^{M} \frac{h^{(t)}(0)}{t!} \lambda_{iv}^t = \sum_{v=1}^{m_i} Q_{iv} h_{iv}(\lambda_{iv})\, D\{\lambda_{iv}^n\} = 0\,,$$

ибо λ_{iv} в силу (9) корни полинома $h(s)$. Тогда (22) запишется в видена величину степени полинома $\varphi(s): h(s)\bar{K}_i(s) = \sum_{t=0}^{M} \frac{h^{(t)}(0)}{t!} \sum_{j=1}^{t} s^{j-1} K_i(t-j)$.Отсюда, делая подстановку $j_1 = j-1, j_1 \to j$, и, заменяя порядок суммирования, имеем

$$h(s)\bar{K}_i(s) = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{t=j+1}^{M} \frac{h^{(t)}(0)}{t!} s^j K_i(t-1-j)\,. \tag{23}$$

В силу (23) полином $B(s)$ принимает вид

$$B(s)=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{M-1}b_{ij}s^{i+j}\ , \tag{24}$$

где
$$b_{ij}(s)\equiv\sum_{t=j+1}^{M}\frac{h^{(t)}(0)}{t!}K_i(t-1-j)\,. \tag{25}$$

Таккакимеет место(20),товсекоэффициенты полинома $B(s)$ при $i+j\geq M+l-k+1$ равны нулю, а коэффициент при $i+j=M+l-k$ отличен от нуля. Изображая область определения коэффициентов полинома $B(s)$ на плоскости $i0j$, получаем следующие условия

$$\sum_{i=l-M+2}^{l}\ \sum_{j=l-i+1}^{M-1}b_{ij}\ s^{i+j}=0\,, \tag{26}$$

$$\sum_{j=0}^{M-1}\ \sum_{i=M+l-k+1-j}^{l-j}b_{ij}\ s^{i+j}=0\,, \tag{27}$$

$$\sum_{i=l+1-k}^{M+l-k}b_{i,\,M+l-k-i}\neq 0\,. \tag{28}$$

Условия (26), (27), (28) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы степень полинома $\varphi(s)$ была равна $M+l-k$. Далее займемся упрощением условий (26), (27) и (28). Из (26) и (27) после подстановки $i=l-\delta,\ i+j=M+l-x$ и перестановки порядка суммирования имеем

$$\sum_{x=1}^{M-1}s^{M+l-x}\sum_{\delta=0}^{x-1}b_{l-\delta,\,M-x+\delta}=0\,, \tag{26$_1$}$$

$$\sum_{x=M}^{k-1}s^{M+l-x}\sum_{\delta=x-M}^{x-1}b_{l-\delta,\,M-x+\delta}=0\,. \tag{27$_1$}$$

Отсюда, приравнивая нулю, коэффициенты при одинаковых степенях s, получим

$$\sum_{\delta=0}^{x-1}b_{l-\delta,\,M-x+\delta}=0,\quad x=\overline{1,\,M-1}\,, \tag{26$_2$}$$

$$\sum_{\delta=x-M}^{x-1}b_{l-\delta,\,M-x+\delta}=0,\quad x=\overline{M,\ k-1}\,. \tag{27$_2$}$$

В силу (25) из (26$_2$) и (27$_2$) имеем

$$\sum_{\delta=0}^{x-1}\ \sum_{t=M-x+\delta+1}^{M}\frac{h^{(t)}(0)}{t!}K_{l-\delta}(t-1-M+x-\delta)=0,\quad x=\overline{1,\,M-1}\,, \tag{26$_3$}$$

$$\sum_{\delta=x-M}^{x-1}\ \sum_{t=M-x+\delta+1}^{M}\frac{h^{(t)}(0)}{t!}K_{l-\delta}(t-1-M+x-\delta)=0,\quad x=\overline{M,\,k-1}\,. \tag{27$_3$}$$

Отсюда, заменяя суммирования и производя подстановку $\sigma=t-M+x$, получим

$$\sum_{\sigma=1}^{x}\frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!}\sum_{\delta=0}^{\sigma-1}K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)=0,\quad x=\overline{1,\,M-1}\,, \tag{26$_4$}$$

$$\sum_{\sigma=x-M+1}^{x} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=x-M}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)=0, \quad x=\overline{M,\, k-1}. \qquad (27_4)$$

К левой части равенства (27_4) прибавляя и вычитая выражение $\sum_{\sigma=1}^{x-M-1} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)+\sum_{\sigma=x-M}^{x} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=0}^{x-M-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)$,имеем

$$\begin{gathered}\sum_{\sigma=0}^{x} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)-\sum_{\sigma=1}^{x-M-1} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)- \\ -\sum_{\sigma=x-M}^{x} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=0}^{x-M-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)=0, \quad x=\overline{M,\, k-1}.\end{gathered} \qquad (27_5)$$

Третью сумму s_3 в левой части (27_5)преобразуем дальше. Производя подстановку $\sigma_1=\sigma+M-x$, получим

$$\begin{gathered} s_3=\sum_{\sigma_1=0}^{M} \frac{h^{(\sigma_1)}(0)}{\sigma_1!} \sum_{\delta=0}^{x-M-1} \sum_{v=1}^{m_{l-\delta}} Q_{l-\delta,v} \lambda_{l-\delta,v}^{\sigma_1-M+x-1-\delta}= \\ =\sum_{\sigma=0}^{x-M-1} \sum_{v=1}^{m_{l-\sigma}} Q_{l-\delta,v} \lambda_{l-\delta,v}^{x-1-M-\delta}\left\{\sum_{\sigma_1=0}^{M} \frac{h^{(\sigma_1)}(0)}{\sigma_1!} \lambda_{l-\delta,v}^{\sigma_1}\right\}=0, \quad x=\overline{M,\, k-1}.\end{gathered} \qquad (29)$$

Учитывая (29), из (27_5) имеем

$$\sum_{\sigma=x-M}^{x} \frac{h^{(\sigma+M-x)}(0)}{(\sigma+M-x)!} \sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)=0, \quad x=\overline{M,\, k-1}. \qquad (27_6)$$

Соотношение (27_4) и(27_6) можно рассматривать как линейную однородную систему относительно неизвестных

$$y_\sigma=\sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)=0, \quad \sigma=\overline{1,\, k-1}. \qquad (27_6)$$

Как видно, матрица этой системы треугольная, все диагональные элементы ее равны единице. Поэтому определитель ее отличен от нуля и система имеет только нулевое решение $y_\sigma=0,\ \sigma=\overline{1,\, k-1}$т.е.

$$\sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)=0, \quad \sigma=\overline{1,\, k-1}. \qquad (30)$$

В (28) производя подстановку $i=l-\delta,\ i+j=M+l-k$ и учитывая (25), имеем

$$\sum_{\delta=0}^{k-1} \sum_{t=M-k+\delta+1}^{M} \frac{h^{(t)}(0)}{t!} K_{l-\delta}(t-1-M+k-\delta) \neq 0.$$

Здесь, меняя порядок суммирования и производя подстановку $\sigma=t-M+k$,

получим(26_3) $\sum_{\delta=1}^{k} \frac{h^{(\sigma+M-k)}(0)}{(\sigma+M-k)!} \sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta) \neq 0$,или

$$\sum_{\delta=1}^{k-1} \frac{h^{(\sigma+M-k)}(0)}{(\sigma+M-k)!} \sum_{\delta=0}^{\sigma-1} K_{l-\delta}(\sigma-1-\delta)+\sum_{\delta=0}^{k-1} K_{l-\delta}(k-1-\delta) \neq 0. \qquad (31)$$

В силу (30) из (31) имеем

$$\sum_{\delta=0}^{k-1} K_{l-\delta}(k-1-\delta) \neq 0 . \tag{32}$$

Полученный результат сформулируем в виде отдельного предложения.

ТЕОРЕМА1. Если $r > k$, то для того, чтобы степень полинома $\varphi(s)$ была равна $M+l-k$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (30) и (32).

При выводе условий (30) и (32) предполагалось, что $M < k$. Условия (30) и (32) не изменяются и при $M \geq k$. Теперь покажем, что при $r > k$ выполняется неравенство (15). Из (10) имеем

$$s^{j+1} b_j(s) = b(s) - \sum_{i=0}^{j} a_i\, s^i h(s) , \tag{33}$$

$$s^{j+1} B_j(s) = B(s) - \sum_{i=0}^{j} \sum_{\nu=1}^{m_i} Q_{i\nu}\, s^i h_{i\nu}(s) . \tag{34}$$

При $0 \leq j \leq m-1$ отсюда будем иметь

$$s^{j+1}[b_j(s) - B_j(s)] = \varphi(s) - \sum_{i=0}^{j} a_i\, s^i h(s) + \sum_{i=0}^{j} \sum_{\nu=1}^{m_i} Q_{i\nu}\, s^i h_{i\nu}(s) . \tag{35}$$

Из (35) с учетом (17) получим

$$ст.\, [b_j(s) - B_j(s)] + j + 1 \leq \max\{M+l-k,\ M+j\}, \quad j = \overline{0,\, m-1} . \tag{35'}$$

Следовательно, в силу $r > k$

$$\max_{0 \leq j \leq m-1} ст.\, [b_j(s) - B_j(s)] \leq M + l - k - 1 . \tag{36}$$

Теперь оценим величину степени $B_j(s)$ при $m \leq j \leq l-1$. Так как ввиду (20), то из (34) с учетом (36) найдем $ст. B_j(s) + j + 1 \leq \max\{M+l-k,\ M-1+j\}$, откуда ввиду $l-k \geq 0$

$$\max_{m \leq j \leq l-1} ст.\ B_j(s) \leq M + l - k - m - 1 \leq M + l - k - 1 . \tag{37}$$

Из (36) и (37) с учетом структуры полинома $\psi(s)$ заключаем, что

$$ст.\ \psi(s) \leq M + l - k - 1$$

т.е. справедливость неравенства (15) при $r > k$. В силу (15) в (14) можем перейти к оригиналу непосредственно. Следовательно, доказана

ТЕОРЕМА2. Если полиномы $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ определены по правилу (12) и (13), то при $r > k$ всегда

$$ст.\ \varphi(s) > ст.\ \psi(s) ,$$

каковы бы ни были величины $u_i,\ i = \overline{0,\ l-1}$.

СЛЕДСТВИЕ. Отношение $\psi(s) : \varphi(s)$ при $r > k$ является правильным дробно-рациональным выражением.

Литература

1. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фрунзе, 1957.– 327 с.
2. Боташев А.И., Усубалиев Э.О разрешимости задачи Коши для неоднородных интегро-дифференциальных уравнений. Сб. “Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии”, вып. 8, Фрунзе, “Илим”, 1971.
3. Быков Я.В., Линенко В.Г. О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений, Фрунзе, “Илим” 1968. – 140 с.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей, “Наука”, М., 1967. – 375 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., Искандаров С.