МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТРАНСПОРТ.

Артыкова Ж.А.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРИСОЕДИНЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГРАФИКА ОТОБРАЖЕНИЯ

Zh.A. Artykova

SOME PROPERTIES ATTACHED TO THE SURFACE OF THE GRAPHICS DISPLAY

УДК:514.757.3

Ключевые слова: *график отображения, сеть на поверхности, минимальная поверхность, присоединенная поверхность, вторая поляра*

Key words: *the graph, the network on the surface, minimal surface attached surface, the second polar*

Исследованы свойства присоединенной поверхности графика отображения двумерной поверхности в двумерную плоскость в пятимерном евклидовом пространстве. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы вторая поляра являлась эллипсоидом, гиперболоидом.

Рассмотрены две вполне ортогональные евклидовы плоскости E_2, E_3 а пятимерном евклидовом пространстве E_5: $E_2 \cap E_3 = O$, где O – общая точка плоскостей E_2, E_3. Пусть V_2 - гладкая поверхность в E_3, $\Omega \subset V_2$ - область на этой поверхности, $\overline{\Omega}$ - область в E_2.

Рассмотрим диффеоморфизм $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ такой, что $\forall X_1 \in \Omega : f(X_1) = X_2 \in \overline{\Omega}$. Поверхность V_2^* в E_5, которая определяется следующим образом:

$$V_2^* = \left\{ X \mid \vec{OX} = \vec{OX_1} + \vec{OX_2},\ X_1 \in \Omega,\ f(X_1) = X_2 \in \overline{\Omega} \right\}$$

называется графиком отображения $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ [1].

Отнесем области $\Omega, \overline{\Omega}$ и график V_2^* соответственно к подвижным реперам:

$$\Re^{X_1} = \{X_1, \vec{e}_i, \vec{n}\},\ \Re^{X_2} = \{X_2, \vec{e}_{3+i}\},\ \Re^{X} = \{X, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_\alpha\},$$

где $i,j,k,l,s,t = 1,2;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta = 3,4,5$, $\vec{e}_i \in T_2(X_1)$ - касательная плоскость к V_2 в точке X_1, $\vec{n}$ - орт нормали к V_2 в этой же точке X_1, $\vec{\varepsilon}_{3+i} = f_{*X_1}(\vec{e}_i)$,

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{3+i} \in T_2(X) \quad (1)$$

($T_2(X)$ - касательная плоскость к V_2^* в точке X).

$\vec{\varepsilon}_3 = \vec{n}$, $\vec{\varepsilon}_{3+i} = \vec{e}_i - \gamma_{is}\overline{\gamma}^{sk}\vec{e}_{3+k} \in N_3(X)$ ($N_3(X)$ - ортогональное дополнение к $T_2(X)$ в E_5).

Деривационные формулы реперов имеют вид:

$\Re^{X_1}$: $d\vec{X}_1 = \omega^i \vec{e}_i$,

$d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^3 \vec{n}$,

$d\vec{n} = \omega_3^j \vec{e}_j$.

$\Re^{X_2}$: $d\vec{X}_2 = \overline{\omega}^i \vec{e}_{3+i}$, ($\overline{\omega}_i = \omega_i$)

$d\vec{e}_{3+i} = \overline{\omega}_i^j \vec{e}_{3+j}$.

$\Re^{X}$: $d\vec{X} = \theta^i \vec{\varepsilon}_i$, ($\theta^i = \omega^i$), $d\vec{n} = \theta_3^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_3^{3+j} \vec{\varepsilon}_{3+j}$,

$d\vec{\varepsilon}_i = \theta_i^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_i^3 \vec{n} + \theta_i^{3+j} \vec{\varepsilon}_{3+j}$,

$d\vec{\varepsilon}_{3+i} = \theta_{3+i}^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_{3+i}^3 \vec{n} + \theta_{3+i}^{3+j} \vec{\varepsilon}_{3+j}$.

Метрических тензоров обозначим следующим образом:

$$\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j;\ \overline{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{3+\bar{i}} \vec{e}_{3+\bar{j}};\ g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \vec{\varepsilon}_j = \gamma_{ij} + \overline{\gamma}_{ij};\ \overline{g}_{ij} = \vec{\varepsilon}_{3+i} \vec{\varepsilon}_{3+j} = \gamma_{ij} + \gamma_{is}\gamma_{jt}\overline{\gamma}^{st},$$

где $\left\|\bar{\gamma}^{st}\right\| = \left\|\gamma^{st}\right\|^{-1}$.

Дифференцируя тождество (1) и учитывая деривиационных формул, получим:

$$\omega_i^k = \theta_i^k + \theta_i^{3+k}\,,\ \omega_i^3 = \theta_i^3\,;\ \overline{\omega}_i^k = \theta_i^k - \gamma_{tl}\bar{\gamma}^{lk}\theta_i^{3+t} \tag{2}$$

Поверхности V_2 и V_2^* задаются уравнениями: $\omega^3 = 0$, $\theta^\alpha = 0$ в соответствующих реперах $\Re^{X_1}$, $\Re^X$. Дифференцируя внешним образом эти уравнения и применяя лемму Картана [2], имеем:

$$\omega_i^3 = b_{ij}^3\omega^j\,,\ \theta_i^3 = t_{ij}^3\theta^j = b_{ij}^3\omega^j\,,\ \theta_i^{3+k} = t_{ij}^{3+k}\theta^j\,, \tag{3}$$

где b_{ij}^3 - второй основной тензор поверхности $V_2 \subset E_3$, $\left\{t_{ij}^3, t_{ij}^{3+k}\right\}$ - второй основной тензор поверхности $V_2^* \subset E_5$, $b_{ij}^3 = b_{ji}^3$; $t_{ij}^{3+k} = t_{ji}^{3+k}$.

Пусть задана ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset \Omega$. Тогда сеть $\overline{\overline{\Sigma}}_2 = f(\Sigma_2) \subset \overline{\Omega}$ (их называют основанием отображения) и соответствующая им сеть $\sum_2^*$ на графике V_2^* также будут ортогональными. Если векторы $\vec{e}_i$ репера $\Re^{X_1}$ расположить на касательных к линиям сети $\sum_2 \subset \Omega$ в точке X_1, то в этом случае векторы $\vec{e}_{3+i}$ и $\vec{\varepsilon}_i$ реперов $\Re^{X_2}$ и $\Re^X$ будут касательными к линиям соответствующих сетей $\overline{\sum}_2$ и $\sum_2^*$.

Тогда формы ω_i^k, $\overline{\omega}_i^k$, θ_i^k $(i \neq k)$ являются главными [3]:

$$\omega_i^k = a_{ij}^k\omega^j\,,\ \overline{\omega}_i^k = \overline{a}_{ij}^k\omega^j\,,\ \theta_i^k = t_{ij}^k\omega^j\,, \tag{4}$$

и имеют места соотношения:

$$\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij} = g_{ij} = \bar{g}_{ij} = 0,\ i \neq j. \tag{5}$$

В таком случае вектор средней кривизны [4] поверхности $V_2 \subset E_3$ имеет вид:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(b_{11}^3 + b_{22}^3)\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(b_{11}^3 + b_{22}^3)\vec{n}\,,$$

а вектор средней кривизны графика V_2^* отображения $f: \Omega \to \overline{\Omega}$ имеет следующий вид:

$$\vec{M}^* = \frac{1}{2}\left(\vec{t}_{11} + \vec{t}_{22}\right),$$

где $\vec{t}_{ii} = t_{ii}^\alpha\vec{e}_\alpha$. Таким образом, в случае специально выбранного репера $\Re^X$ необходимое и достаточное условие минимальности графика V_2^* выражается следующим образом [5]: $\vec{t}_{11} = -\vec{t}_{22}$.

Для поверхности $V_2^* \subset E_5$ присоединенная поверхность является поверхностью второго порядка и вторая поляра Q точки $X \in V_2^* \subset E_5$ относительно присоединенной поверхности совпадает с самой присоединенной поверхностью.

Ее уравнение в ортонормированном репере $\Re^X$ принимает вид [6]:

$$A_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta + 2A_{\alpha 0}y^\alpha + 2 = 0\,, \tag{6}$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(t_{ii}^\alpha t_{jj}^\beta + t_{ii}^\beta t_{jj}^\alpha - 2t_{ij}^\alpha t_{ij}^\beta\right),\ A_{\alpha 0} = -\sum_i t_{ii}^\alpha\,.$$

В работе [7] выяснен геометрический смысл этих коэффициентов.

Пусть векторы $\vec{\varepsilon}_\alpha$ $(\alpha = 3,4,5)$ репера $\Re_X$ являются главными направлениями присоединенной поверхности и график V_2^* является минимальной поверхностью. Тогда уравнение второй поляры Q имеет вид [7]:

$$\sum_\alpha A_{\alpha\alpha}\left(Y^\alpha\right)^2 = -2 \tag{7}$$

или

$$\frac{(Y^3)^2}{-\dfrac{2}{A_{33}}} + \frac{(Y^4)^2}{-\dfrac{2}{A_{44}}} + \frac{(Y^5)^2}{-\dfrac{2}{A_{55}}} = 1\,.$$

Отсюда имеем: если $A_{\alpha\alpha}<0$ для всех значений $\alpha=3,4,5$, то вторая поляра Q является эллипсоидом; если $A_{\alpha\alpha}<0$ для одного значения α, то Q является двухполостным гиперболоидом; если $A_{\alpha\alpha}<0$ для двух значений, то Q является однополостным гиперболоидом.

Также заметим, что в случае, когда график V_2^* отображения f является минимальной поверхностью, Q не может быть конусом.

Геометрический смысл неравенства $A_{\alpha\alpha}<0$ заключается в следующем:

$$\sum_{i,j}\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ii}\right)\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{jj}\right)<\sum_{i,j}\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ij}\right)\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ji}\right), \tag{8}$$

где $\vec{a}_{ii}=t_{ii}^{\alpha}\vec{\varepsilon}_\alpha$ - вектор вынужденной кривизны линии θ^i сети $\sum_2^*$ на V_2^*; $\vec{a}_{ij}=t_{ij}^{\alpha}\vec{\varepsilon}_\alpha$ - вектор вынужденной кривизны этой линии θ^i вдоль направлению $\vec{\varepsilon}_j$.

Рассмотрим случай, когда график V_2^* отображения f является не минимальной поверхностью. В таком случае уравнение второй поляры имеет вид [7]:

$$\sum_\alpha A_{\alpha\alpha}\left(Y^\alpha\right)^2=\sum_\alpha\frac{\left(A_{\alpha 0}\right)^2}{A_{\alpha\alpha}}-2\,. \tag{9}$$

Введем обозначение:

$$B=\sum_\alpha\frac{(A_{\alpha 0})^2}{A_{\alpha\alpha}}=\frac{(A_{30})^2}{A_{33}}+\frac{(A_{40})^2}{A_{44}}+\frac{(A_{50})^2}{A_{55}} \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) имеет вид:

$$\sum_\alpha A_{\alpha\alpha}(Y^\alpha)^2=B-2 \tag{11}$$

Если $A_{\alpha\alpha}>0$ для всех значений $\alpha=3,4,5$, то из (10) видно, что $B>0$. Тогда справедлива

Теорема 1. Вторая поляра Q является эллипсоидом тогда и только тогда, когда выполняется условие $B>2$.

Найдем геометрический смысл выражения (10). В работе [7] найден геометрический смысл коэффициентов $A_{\alpha\alpha}$ и $A_{\alpha 0}$:

$$A_{\alpha\alpha}=\sum_{i,j}\left[\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ii}\right)\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{jj}\right)-\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ij}\right)\left(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ji}\right)\right];$$

$$A_{\alpha 0}=-\sum_i(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ii})\,.$$

В силу последних равенств из (10) получим

$$B=\sum_\alpha\frac{(A_{\alpha 0})^2}{A_{\alpha\alpha}}=\sum_\alpha\frac{\left(-\sum_i(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ii})\right)^2}{\sum_{i,j}\left[(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ii})(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{jj})-(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ij})(\vec{e}_\alpha\vec{a}_{ji})\right]}\,.$$

Пусть $A_{33}<0$, $A_{44}>0$, $A_{55}>0$. Тогда

$$B>2\Leftrightarrow\frac{(A_{40})^2}{A_{44}}+\frac{(A_{50})^2}{A_{55}}>2-\frac{(A_{30})^2}{A_{33}}\,. \tag{12}$$

В таком случае вторая поляра Q является однополостным гиперболоидом.

Если имеет место условие $B<2$, т.е.:

$$\frac{(A_{40})^2}{A_{44}}+\frac{(A_{50})^2}{A_{55}}<2-\frac{(A_{30})^2}{A_{33}}, \tag{13}$$

то Q является двухполостным гиперболоидом.

Если $A_{33}<0$, $A_{44}<0$, $A_{55}>0$, то

$$B > 2 \Leftrightarrow \frac{(A_{50})^2}{A_{55}} > 2 - \frac{(A_{30})^2}{A_{33}} - \frac{(A_{40})^2}{A_{44}}. \qquad (14)$$

В таком случае Q является двухполостным гиперболоидом.

Если имеет место условие:

$$\frac{(A_{50})^2}{A_{55}} < 2 - \frac{(A_{30})^2}{A_{33}} - \frac{(A_{40})^2}{A_{44}} \qquad (15)$$

то Q является однополостным гиперболоидом.

Другие случаи аналогичны выше изложенным. Таким образом справедлива

Теорема 2. Вторая поляра Q является однополостным гиперболоидом тогда и только тогда, когда выполнены условия (12), (15); Q является двухполостным гиперболоидом тогда и только тогда, когда выполнены условия (13), (14).

Литература:

1. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. // Вопросы дифференциальной геометрии. Т.1. №374. уч. записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, С. 65-70.
2. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. – М., 1948. - 365с.
3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сб. – 1966. – Т.6, №4, - С. 475-491.
4. Схоутен И.А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии Т. 2. М., 1948.
5. Рылов А.А. Об отображении двумерной поверхности на плоскость //Геометрия погруженных многообразий Москва 1986, с. 88-93.
6. Ефрос П. И. О поверхностях коразмерное три евклидова пространства //Геометрия погруженных многообразий. М.1986. с. 26-30.
7. Матиева Г., Артыкова Ж.А. «О присоединенной поверхности графика отображения двумерной поверхности в двумерную плоскость в евклидовом пространстве» Вестник ОшГУ: Ош-2013, спец. вып. посв. 60-летия проф. К.Алымкулова. с. 198-202.

Рецензент: д.ф-м.н. Сопуев А.С.