МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТРАНСПОРТ

Сатыбаев А.Дж., Маматкасымова А.Т.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

A.Dzh. Satybaev, A.T. Mamatkasymova

FINITE-DIFFERENSE ALGORITHM FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM FOR MAXWELL`S EQUATIONS

Сатыбаев А.Дж., Маматкасымова А.Т.

МАКСВЕЛЛ ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН ЧЕНЕМ-АЙРЫМАЛЫК АЛГОРИТМИ

УДК:519.633, 517.962.2

В статье приведен один из способов решения обратной задачи для системы уравнений Максвелла, а также ее алгоритм решения.

***Ключевые слова.** Система уравнений Максвелла, конечно-разностный метод, алгоритм решения.*

This article shows one way to solve the inverse problem for Maxwell's equations, and its solution algorithm.

***Key words:** Maxwell equations, finite difference method, the algorithm solutions.*

Постановка задачи. Рассмотрим полную систему уравнений Максвелла, которая описывает уравнения для электрической и магнитной напряженностей [1], в случае точечного источника и простейшего вида анизотропии [1, 2, 3]:

$$j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(x_1, x_2)\, \delta(x_3)\, \delta(t), \qquad (1)$$

,

$$\varepsilon(z) = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \sigma(z) = diag(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2), \mu(z) = diag(\mu_1, \mu_1, \mu_2), \qquad (2)$$

где функции $\varepsilon_k, \mu_k, \sigma_k$, $k = 1,2$ достаточно гладкие функции при $x_3 \geq 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\mu_k > 0$, $\sigma_k \geq 0$ при $x \leq 0$.

Тогда прямая задача системы уравнений Максвелла имеет вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} rotH &= \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j, \\ rotE &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad x \in R^3, x_3 \neq 0, t \in R_+, \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

$$(E,H)\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad (4)$$

$$\lfloor E_j \rfloor_{x_3=0} = 0, \ \lfloor H_j \rfloor_{x_3=0} = 0, \ j = \overline{1,2} \qquad (5)$$

***Обратная задача заключается в определении функции электропроводимость -** $\sigma(x_3)$ **при** $x_3 > 0$**, известных функциях** $\varepsilon(x_3)$, $\mu(x_3)$ **-диэлектрическая и магнитная проницаемость при всех** x_3.*

Решение. При некоторых преобразованиях система уравнений (3), состоящих из шести уравнений распадается на две независимые системы по три уравнений в каждой системе [1] ,

т.е, $W = W_1 = \left(W_{(1)}, W_{(2)} W_{(3)}\right)^*$, $W_2 = \left(W_{(4)}, W_{(5)}, W_{(6)}\right)^*$,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + k\frac{\partial W}{\partial z} + M(z)W + R\delta(z,t) = 0, \quad (6)$$

$$W\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{7}$$

$$\left[\frac{W_{(1)}+W_{(2)}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right]_{Z=0}=0, \quad \left[\frac{W_{(1)}-W_{(2)}}{\sqrt{\mu_1}}\right]_{z=0}=0, \tag{8}$$

где $k=diag(-1,1,0)$, $R=(\lambda_1,\lambda_1,0)^* \dfrac{1}{|\lambda|}\sqrt{\dfrac{\mu_1(0)}{2}}$

задачу (6) - (8) рассмотрим в области $\Pi(T,0)=\bigcup\limits_{j=1}^{3}\Pi_j(T,0)$,

$$\begin{aligned}&\Pi_1(T,0)=\{(z,t): z\in(-T,0), \quad |z|<t<T-|z+T|\}\\&\Pi_2(T,0)=\{(z,t): z\in(-T,0), \quad -z<t<2T+z\},\\&\Pi_3(T,0)=\{(z,t): z\in(0,T), \quad z<t<2T-z\}\end{aligned} \tag{9}$$

Выделим сингулярную и регулярную часть решения системы (6), для этого представим решения системы (6) в виде

$$\begin{aligned}&W_{(1)}(z,t)=V_{(1)}(z,t)+p_{(1)}(z)\delta(t+z)+p_{(3)}\delta(t+z)\theta(-z),\\&W_{(2)}(z,t)=V_{(2)}(z,t)+p_{(2)}(z)\delta(t-z)\\&W_{(3)}(z,t)=V_{(3)}(z,t)\end{aligned} \tag{10}$$

Тогда для регулярной части решения $V=\left(V_{(1)},V_{(2)},V_{(3)}\right)^*$ получим следующую обратную задачу:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+K\frac{\partial V}{\partial z}+M(z)V=0, \ (z,t)\in\Delta(T), \tag{11}$$

$$V_{(2)}\big|_{t=z}=-\frac{1}{2}b_{(1)}(z)p_{(1)}(z), \quad z\in[0,T] \tag{12}$$

$$V_{(3)}\big|_{t=z}=-\grave{a}_{(3)}(z)p_{(1)}(z), \quad z\in[0,T], \tag{13}$$

$$V_{(j)}\big|_{z=0}=g_{(j)}(t), \quad t\in[0,2T], \quad j=1,2 \tag{14}$$

где $M(z)=\begin{bmatrix}a_{(1)} & a_{(2)} & a_{(3)}\\ b_{(1)} & b_{(2)} & b_{(3)}\\ -\lambda_1 & -\lambda_1 & 0\end{bmatrix}$, $K-diag(-1,1,0)$,

$$a_{(j)}(z)=\frac{\bar{\sigma}_1(z)}{2\bar{\varepsilon}_1(z)}-(-1)^j\frac{\sqrt{\bar{\mu}_1(z)}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_1(z)}}\right)'_z+\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_1(z)}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_1(z)}}\right)'_z, \qquad j=1,2$$

$$b_{(j)}(z)=\frac{\bar{\sigma}_1(z)}{2\bar{\varepsilon}_1(z)}-(-1)^j\frac{\sqrt{\bar{\mu}_1(z)}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_1(z)}}\right)'_z-\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_1(z)}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_1(z)}}\right)'_z, \qquad j=1,2$$

$$a_{(3)}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\bar{\varepsilon}_1(z)\bar{\mu}_2(z)}}, \qquad b_{(3)}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\bar{\varepsilon}_2(z)\bar{\mu}_1(z)}},$$

$$p_{(1)}(z)=\gamma_0+\int_0^z a_{(1)}(\xi)p_{(1)}(\xi)d\xi, \qquad z\in[-T,0] \tag{15}$$

$$p_{(2)}(z)=\gamma_0-\int_0^z b_{(2)}(\xi)p_{(2)}(\xi)d\xi, \qquad z\in[0,T] \tag{16}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_{(1)}(0)}{2}}.$$

Здесь элементы $a_{(3)}(Z)$, $b_{(3)}(Z)$ - известны, а в элементы $a_{(1)}(Z), a_{(2)}(Z)$, $b_{(1)}(Z), b_{(2)}(Z)$ входит неизвестная функция $\sigma_{(1)}(Z)$.

Численное решение. Для численного решения задачи введем сеточную область $z_i = ih$, $h = \frac{T}{N}$, $i = \overline{0,N}$ и составим конечно-разностный аналог задачи.

Отбрасывая малую часть O(h) получим конечно – разностный аналог обратной задачи (11)-(14).

$$\left.\begin{aligned}&\left(u_{(2)i}^{k+1} - u_{(2)i}^{k}\right) + \left(u_{(2)i}^{k} - u_{(2)i-1}^{k}\right) + h\cdot\left[a_{(1)i-1}u_{(1)i-1}^{k} + a_{(2)i-1}u_{(2)i-1}^{k} + a_{(3)i-1}u_{(3)i-1}^{k}\right] = 0\\&\left(u_{(1)i}^{k+1} - u_{(1)i}^{k}\right) - \left(u_{(1)i+1}^{k} - u_{(1)i}^{k}\right) + h\cdot\left[b_{(1)i}u_{(1)i}^{k} + b_{(2)i}u_{(2)i}^{k} + b_{(3)i}u_{(3)i}^{k}\right] = 0\\&\left(u_{(3)i}^{k+1} - u_{(3)i}^{k}\right) = \lambda a_{(3)}h\cdot\left(u_{(1)i}^{k} + u_{(2)i}^{k}\right),\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$u_{(2)i}^{i} = -\frac{1}{2}b_{(1)i}q_i, \qquad i = \overline{0,N} \tag{18}$$

$$u_{(3)i}^{i} = -a_{(3)i}q_i, \qquad i = \overline{0,N} \tag{19}$$

$$u_{(m)0}^{k} = g_{(m)}^{k}, \qquad k = \overline{0,2N}, \quad m = 1,2 \tag{20}$$

$$q_{i+1} = \gamma_0 - h\sum_{l=0}^{i} a_{(1)l}q_l, \qquad i = \overline{0,N-1} \tag{21}$$

Если мы определим $a_{(l)i}$ и $b_{(l)i}$, $l = \overline{1,2}$, то по этим формулам определим σ_{1i}:

$$b_{(l)i} = \frac{\bar{\sigma}_{1i}}{2\bar{\varepsilon}_{1i}} \mp \frac{\sqrt{\bar{\mu}_{1i}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_{1i}}}\right)' - \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_{1i}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_{1i}}}\right)', \qquad l = 1,2 \tag{22}$$

$$a_{(l)i} = \frac{\bar{\sigma}_{1i}}{2\bar{\varepsilon}_{1i}} \pm \frac{\sqrt{\bar{\mu}_{1i}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_{1i}}}\right)' + \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_{1i}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_{1i}}}\right)', \qquad l = 1,2 \tag{23}$$

$$b_{(l)i} = \frac{\bar{\sigma}_{1i}}{2\bar{\varepsilon}_{1i}} \pm \left(-\frac{1}{4\mu_{1i}}\right) - \left(\frac{1}{4\varepsilon_{1i}}\right), \qquad l = 1,2$$

$$a_{(l)i} = \frac{\bar{\sigma}_{1i}}{2\bar{\varepsilon}_{1i}} \mp \left(-\frac{1}{4\mu_{1i}}\right) + \left(-\frac{1}{4\varepsilon_{1i}}\right), \qquad l = 1,2$$

$\sigma(x_3)$ – неизвестная функция при $x_3 \in R_+$.

$\varepsilon(x_3)$, $\mu(x_3)$ – известные функции при $x_3 \in R$.

$\sigma(x_3)$ – известная функция при $x_3 \in R_-$.

$\sigma = (\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3)$, $\varepsilon = (\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3)$, $\mu = (\mu 1, \mu 2, \mu 3)$

Алгоритм обратной задачи

1. $U1_0^k = g1^k$, $k = \overline{0,2N}$.

2. $U2_0^k = g2^k$, $\quad k = \overline{0,2N}$.

3 $q1_0 = \gamma_0 = \sqrt{\dfrac{\mu 1(0)}{2}}$

4. $\sigma 1(0) = b1(0) \cdot 2 \cdot \varepsilon 1(0) + 1/(4\mu 1(0)) - 1/(4\varepsilon 1(0))$.

5. $a3(0) = 1/\left(\sqrt{2\varepsilon 1(0)\mu 2(0)}\right)$.

6. $b3(0) = 1/\sqrt{2\varepsilon 1(0) * \mu 2(0)}$).

7. $U3_0^0 = -a3(0) * q1(0)$

8. $U3_0^{k+1} = U3_0^k + h \cdot a3(0) \cdot \left(U1_0^k + U2_0^k\right)$, $\overline{k = 0, N-1}$

9. $U2_{j+1}^{k+1} = U1_j^k - h\left[a1_j \cdot U1_j^k + a2_j U2_j^k + a3_j U3_j^k\right]$, $\quad k = \overline{j, 2N - j - 1}$

10. $U1_{j+1}^k = U2_j^k + h\left[b1_j \cdot U1_j^{k+1} + b2_j U2_j^{k+1} + b3_j U3_j^{k+1}\right]$, $\quad k = \overline{j+1, 2N - j}$.

Заключение. Построен конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи для системы уравнений Максвелла. По данному алгоритму можно провести численные реализации на компьютере.

Литература

1. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений- Новосибирск:Наука,1988.-166 с.
2. Кабанихин С.И., Абдиев К.С. Моделирование начальной стадии процесса становления электрического тока и его использования в задаче определения тензора проводимости // Вопросы корректности обратных задач математической физики /АН СССР, Сиб. отделение. ВЦ. –Новосибирск, 1982. – С. 85-94.
3. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. – Новосибирск: Наука, 1991.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Сопуев А.С.