Маматкасымова А.Т.

МАКСВЕЛЛ ТEҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ТҮЗ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИН ЧЕНЕМ-АЙЫРМАЛЫК АЛГОРИТМИ

Маматкасымова А.Т.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

A.T. Mamatkasymova

FINITE-DIFFERENCE ALGORITHM FOR SOLVING THE DIRECT PROBLEM FOR MAXWELL`S EQUATIONS

УДК: 519.633, 517.962.2

Бул макалада Максвелл тендемелер системасынын туз маселесинин чечиминин алгоритми келтирилген.
***Урунттуу создор:** Максвелл тендемелер системасы, ченем-айрымалык усул, чечимдин алгоритми.*
В данной работе приведен алгоритм решения прямой задачи системы уравнений Максвелла.
***Ключевые слова:** Система уравнений Максвелла, конечно-разностный метод, алгоритм решения.*

This paper presents an algorithm for solving the direct problem of Maxwell`s equations.
***Key words:** Maxwell equations, finite difference method solution algorithm.*

Постановка задачи. Полная система уравнений Максвелла описывает системы уравнений электрической и магнитной напряженностей [1]:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}, \tag{1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \tag{2}$$

$$div\vec{D} = 4\pi\rho, \tag{3}$$

$$div\vec{B} = 0, \tag{4}$$

где $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ – вектор смещения электрической напряженности, ε – ди электрическая проницаемость, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ – вектор смещения магнитной напряженности, μ – магнитная проницаемость, $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, ρ – объемная плотность заряда, $\vec{j}$ – точечный источник или плотности тока смещения.

Первое уравнение Максвелла является дифференциальной формой закона полного тока и физический смысл этого уравнения состоит в том, что оно выражает закон создания магнитных полей действием электрических токов и переменных электрических полей.

Физический смысл второго уравнения Максвелла состоит в том, что оно выражает закон создания электрических полей действием переменных магнитных полей.

Система неразрывно связанных и непрерывно порождающих переменных электрического и магнитного полей называется электромагнитным полем.

Третье уравнение Максвелла выражает закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах и с его помощью рассчитываются симметричные электрические поля в неоднородных средах.

Четвертое уравнение Максвелла отражает соледиальность магнитного поля, и физический смысл состоит в отсутствии свободных зарядов.

В нестационарных задачах принято, что электромагнитные колебания до момента времени $t = 0$, отсутствуют, т.е.

$$\vec{E}(x_1, x_2, x_3, t), \vec{H}(x_1, x_2, x_3, t)\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad j(x_1, x_2, x_3, t)\Big|_{t<0} \equiv 0 \tag{5}$$

Так как уравнение (3) является непосредственным следствием равенства (1),(2),(5) а уравнение

(4) является уравнением для определения плотности заряда ρ , то отсюда следует, что задачи (1)-(2) и (5) можно рассматривать как отдельная самостоятельная задача.

При точечном источнике вида

$$j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(x_1, x_2)\delta(x_3)\delta(t), \tag{6}$$

где $\delta(t)$-дельта функция Дирака, а также при

$$\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),\ \sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),\ \mu = diag(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \tag{7}$$

где функции $(\varepsilon, \sigma, \mu) > 0,$ достаточно гладкие функции при $x_3 \geq 0,$ а при $x_3 < 0$, $\varepsilon > 0,$ $\mu > 0,$ $\sigma \geq 0;$ задачи (1)-(2),(5) приводятся к следующей задаче $[1]$

$$\left.\begin{aligned} &rotH = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j, \\ &rotE = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R, \quad x_3 \neq 0, \quad t \in R_+ \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$(E(x_1, x_2, x_3, t), \quad H(x_1, x_2, x_3, t))\Big|_{t<0} \equiv 0, \tag{9}$$

$$\left[E_j\right]_{x_3=0} = 0, \quad \left[H_j\right]_{x_3=0} = 0, \quad j = 1{,}2, \tag{10}$$

где σ – функция электропроводимости.

Прямая задача для системы уравнений Максвелла (8)-(9),(10) заключается в определении функции $E = (x_1, x_2, x_3, t)$ и $H = (x_1, x_2, x_3, t)$ при известных функциях σ, ε, μ , а также при известном точечном источнике j .

При некоторых преобразованиях система (8) из шести уравнений, разлагается на две независимые системы уравнений, где каждая система по три уравнений, т.е. верхняя и нижняя системы $[1, \text{стр.}188]$:

$$W = W_1 = (W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)}), \qquad W_2 = (W_{(4)}, W_{(5)}, W_{(6)}).$$

Здесь $\overline{W}(\lambda, z, t) = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix},$ $\qquad \overline{W}(\lambda, z, t) = \mathrm{Z}^{-1}\widetilde{V}(\lambda, w(z), t),$

$z = z(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{\varepsilon_1(\xi)\mu_1(\xi)}d\xi,$ $\bar{\varepsilon}_k(z) = \varepsilon_k(x_3(z)),$ $\bar{\mu}_k(z) = \mu(x_3(z)),$

$\bar{\sigma}_k(z) = \bar{\sigma}_k(x_3(z)),$ $\kappa = \overline{1{,}2};$ Z - некоторая матрица, которая определена в $[1, \text{стр}288]$,

$\lambda = (\lambda_{1,}\lambda_2),$ $(\lambda, x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$

$$\widetilde{V}(\lambda, x_3, t) = \int_{R_2} V(x, t)\exp\{i(\lambda, x)\}dx_1 dx_2, \qquad V = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим прямую задачу относительно функции

$W = W_1 = (W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)})$, а для $W_2 = (W_{(4)}, W_{(5)}, W_{(6)})$ можно рассмотреть таким же образом, т.е. задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+K\frac{\partial}{\partial z}+M\right)W+R\delta(z,t)=0, \tag{11}$$

$$W(z,t)\big|_{t<0}=0, \tag{12}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\overline{\varepsilon}_1}}(W_{(1)}+W_{(2)})\right]\Bigg|_{z=0}=0,\ \left[\frac{1}{\sqrt{\overline{\mu}_1}}(W_{(1)}-W_{(2)})\right]\Bigg|_{z=0}=0, \tag{13}$$

где $K=diag(-1,1,0),\ R=(\lambda_1,\lambda_2,0)*\frac{1}{|\lambda|}\sqrt{\frac{\overline{\mu}_1(0)}{2}}$,

$$M=\begin{bmatrix} a_{(1)} & a_{(2)} & a_{(3)} \\ b_{(1)} & b_{(2)} & b_{(3)} \\ |\lambda|a_{(3)} & -|\lambda|a_{(3)} & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ b_{(1)} \\ b_{(2)} \end{bmatrix}=\left[\frac{\overline{\sigma}_1}{2\overline{\varepsilon}_1}\pm\left(-\frac{1}{4}\frac{\overline{\mu}'}{\overline{\mu}}\right)+\left(-\frac{1}{4}\frac{\overline{\varepsilon}'}{\overline{\varepsilon}}\right)\right],$$

$$a_{(3)}=1/\left(\sqrt{2\overline{\varepsilon}_1\cdot\overline{\mu}_2}\right);\qquad b_{(3)}=1/\left(\sqrt{2\overline{\mu}_1\cdot\overline{\varepsilon}_2}\right),$$

в следующей области $\quad \prod(T,0)=\bigcup_{j=1}^{3}\prod_j(T,0)$

$$\left.\begin{aligned} &\prod\nolimits_1(T,0)=\{(z,t):z\in(-T,0),\quad |z|<t<T-|z+T|\}, \\ &\prod\nolimits_2(T,0)=\{(z,t):z\in(-T,0),\quad z<t<2T+z\}, \\ &\prod\nolimits_3(T,0)=\{(z,t):z\in(0,T),\quad z<t<2T-z\} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Выделим сингулярную часть и регулярную часть представляя функцию $[2]$
$W=(W_{(1)},W_{(2)},W_{(3)})$ в виде

$$\left.\begin{aligned} &W_{(1)}(z,t)=V_{(1)}(z,t)+p_{(1)}(z)\delta(t+z)+p_{(3)}(z)\delta(t+z)\theta(-z), \\ &W_{(2)}(z,t)=V_{(2)}(z,t)+p_{(2)}(z)\delta(t-z), \\ &W_{(3)}(z,t)=V_{(3)}(z,t),\quad t\in R_{+.}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Поставляя (15) в систему уравнений (11) для непрерывной функции

$V=(V_{(1)},V_{(2)},V_{(3)})$ получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+K\frac{\partial}{\partial z}+M\right]V(z,t)=0,\qquad (z,t)\in\prod(T,0) \tag{16}$$

$$V_{(1)}(z,z)=-\frac{1}{2}a_{(2)}(z)p_2(z),\qquad z\in[0,T], \tag{17}$$

$$V_{(2)}(z,-z)=-\frac{1}{2}b_{(1)}(z)p_1(z), \qquad z\in[-T,0], \tag{18}$$

$$V_{(3)}(z,|z|)=-\frac{1}{2}b_{(1)}(z)\left[p_{(2)}(z)\theta(z)+p_{(1)}(z)\theta(-z)\right], \quad z\in[-T,T], \tag{19}$$

$$V_{(2)}(z)\Big|_{t=-z}=-\frac{1}{2}a_{(1)}(z)p_3(z), \tag{20}$$

$$V_{(3)}(z,t)\Big|_{t=-z}=-\frac{1}{2}a_{(3)}(z)p_{(3)}(z), \quad z\in[-T,0], \tag{21}$$

а на границе

$$V_{(2)}(+0,t)=r_3V_{(2)}(-0,t)-r_2V_{(1)}(+0,t), \tag{22}$$

$$V_{(1)}(-0,t)=r_2V_{(2)}(-0,t)+r_1V_{(1)}(+0,t), \quad t\in[0,2T], \tag{23}$$

Здесь $\theta(z)-$тета функция Хевисайда, $\delta(\mathrm{z})$ - дельта функция Дирака, a

$$p_{(1)}(z)=\gamma_0+\int_0^z a_{(1)}(\xi)p_{(1)}(\xi)d\xi, \qquad z\in[-T,0],$$

$$p_{(2)}(z)=\left[1-\theta(z)(1+r_2)\right]\gamma_0-\int_0^z b_{(2)}(\xi)p_{(2)}(\xi)d\xi, \quad z\in[0,T],$$

$$p_{(3)}(z)=\gamma_0 r_2+\int_0^z a_{(2)}(\xi)p_{(3)}(\xi)d\xi, \qquad z\in[-T,0],$$

$$\gamma_0=\sqrt{\mu_1(0)/2}; \quad r_1=\frac{2}{\omega\cdot\sqrt{\varepsilon_1^{+}\cdot\mu_1^{+}}}; \quad r_2=\frac{1}{\omega\cdot\sqrt{\varepsilon_1^{+}\cdot\mu_1^{-}}}-\frac{1}{\omega\cdot\sqrt{\varepsilon_1^{-}\cdot\mu_1^{+}}};$$

$$r_3=\frac{2}{\omega\cdot\sqrt{\varepsilon_1^{-}\cdot\mu_1^{-}}};$$

Таким образом $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^{+}\cdot\mu_1^{-}}}+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^{-}\cdot\mu_1^{+}}}$; $\varepsilon_1^{\pm}=\lim\limits_{z\to\pm0}\varepsilon_1(z)$, $\mu_1^{\pm}=\lim\limits_{z\to\pm0}\mu_1(z)$.

Мы получили прямую задачу для системы уравнений Максвелла (16) относительно $V=(V_{(1)},V_{(2)},V_{(3)})$ с данными на характеристиках (17), (18), (19), (20), (21) и с граничными условиями (22),(23).

Численное решение. Составим конечно-разностный аналог прямой задачи (17)-(23) отбрасывая малые члены порядка $O(h)$, , здесь $U_j^k=V(z_j,t_k)$,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{U_{(1)j}^{k+1}-U_{(1)j}^{k}}{h}-\frac{U_{(1)j+1}^{k}-U_{(1)j}^{k}}{h}=-f_{(1)j+1}^{k}\\
&\frac{U_{(2)j}^{k+1}-U_{(2)j}^{k}}{h}+\frac{U_{(2)j}^{k}-U_{(2)j-1}^{k}}{h}=-f_{(1)j+1,}^{k}\\
&\frac{U_{(3)j}^{k+1}-U_{(3)j}^{k}}{2h}=-f_{(3)j}^{k},
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

на характеристиках U вычисляется по формулам

$$\left.\begin{array}{l} U_{(1)j}^{j+N} = -\dfrac{1}{2} a_{(2)j} p_{(2)j}, \quad j = \overline{0,N}, \quad U_{(2)j}^{-j-N} = -\dfrac{1}{2} b_{(1)j} p_{(1)j}, \quad j = \overline{-N,0}; \\ U_{(3)j}^{j+N} = -a_{(3)j} p_{(2)j}, \quad j = \overline{-N,0}; \quad U_{(3)j}^{-j-N} = -a_{(3)j} p_{(1)j}, \quad j = \overline{+N,0}; \end{array}\right\} \qquad (25)$$

на границе U вычисляется по следующим формулам

$$\left.\begin{array}{l} U_{(2)+0}^{k} = r_3 * U_{(2)-0}^{k} - r_2 U_{(2)+0}^{k}, \\ U_{(1)-0}^{k} = r_2 U_{(2)-0}^{k} + r_1 U_{(1)+0}^{k}, \quad k = \overline{0,2N} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Правая часть (24) вычисляются по формулам

$$\left.\begin{array}{l} f_{(1)j+1}^{k} = a_{(1)j+1} U_{(1)j+1}^{k} + a_{(2)j+1} + U_{(2)j+1}^{k} + a_{(3)j+1} U_{(3)j+1}^{k}, \\ f_{(2)j+1}^{k} = b_{(1)j+1} U_{(1)j+1}^{k} + b_{(2)j+1} U_{(2)j+1}^{k} + b_{(3)j+1} U_{(3)j+1}^{k}, \\ f_{(3)j}^{k} = a_{(3)j+1} * U_{(1)j}^{k} - a_{(3)j+1} * U_{(2)j}^{k} \end{array}\right\}, \qquad (27)$$

$p_{(1)}(z), p_{(2)}(z), p_{(3)}(z)$ вычисляются по методам прямоугольников:

$$\left.\begin{array}{l} p_{(1)j} = \gamma_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} a_{(1)j} r_{(1)j} * h, \quad j = \overline{1,N}; \quad P_{(1)0} = \gamma_0 \\ p_{(2)j} = r_2 \gamma_0 - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{(2)j} p_{(2)j} * h, \quad j = \overline{1,N}, \quad P_{(2)0} = r_2 \gamma_0 \\ p_{(3)j} = r_2 \gamma_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} a_{(2)j} p_{(3)j} * h, \quad j = \overline{-1,-N}, \quad P_{(3)0} = r_2 \gamma_0 \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Используя выкладки в $[3]$ и используя дискретный аналог неравенства Гронуолла – Беллмана получим оценку

$$\left\| U(i,2N) \right\|_2^2 \le \Pi_1 \left\| U \right\|_2^2 (i, |2i| + 3) \cdot \exp[\Pi_2 \cdot t], \qquad (29)$$

где $\|\cdot\|_2^2$-норма в W_2^1 Π_1, Π_2 - постоянные зависящие от нормы входящих коэффициентов уравнений.

Если будем считать , что U_j^k приближенное решение поставленной дифференциальной задачи , а V_j^k - точное решение, т.е. с малыми членами $O(h,\tau)$, то для них можно получить оценку

$$\left\| U_j^k - V_j^k \right\| (i,2N) \le (\tau + h) p_4, \qquad (30)$$

где $p_4 = \|U\|_{C^2(\overline{\Delta_h(T)})} \cdot \exp(p_3 \cdot T)$.

Теорема. Пусть все входящие коэффициенты уравнения достаточны гладкие и пусть решение прямой задачи существует и имеет частные производные до второго порядка включительно в области $\Delta(T)$.

Тогда существует постоянная $c > 0$ такое, что при $\tau/h < c$ решение конечно-разностной задачи сходится к точно решению со скоростью порядка $O(h)$ в классе $W_2^1(\Delta(T))$ и справедлива оценка (30).

Коэффициент c зависит только от нормы коэффициентов уравнения.

Литература:

1. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Науки, 1991.
2. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М. :Научный мир. 2005.
3. Сатыбаев А.Дж. Конечно-разностные решение задачи сейсмики с данными на характеристиках. //Наука и новые технологии, №3.,-Бишкек, 2004. С. 9-15.

Рецензент: д.ф.-м., профессор Сопуев А.С.