Агыбаев А.С.

О РАВНОМЕРНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

A.S. Agybaev

ON UNIFORMLY TOPOLOGICAL PROPERTIES OF MAPPINGS

УДК-515.12

В настоящей статье вводятся и изучаются τ -финально паракомпактные отображения непрерывных и равномерно τ -финально паракомпактные отображения равномерно непрерывных отображений.

In the present article are introduced and studied-finally паракомпактные display continious and uniformly finally паракомпактные display uniformly continious mappings.

Всюду в работе отображения топологических пространств предполагаются непрерывными, а отображения равномерных пространств – равномерно непрерывными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,σ) называется τ -финально паракомпактным, если для любого открытого покрытия α пространства (X,τ) существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,σ) и локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$.

Напомним ряд хорошо известных понятий из теории топологических и равномерных пространств.

Топологическое пространство (X,τ) называется τ -финально паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие мощности $\leq\tau$.

Равномерное пространство (X,U) называется равномерно τ -финально паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие мощности $\leq\tau$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякое отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ τ -финально паракомпактного топологического пространства (X,τ) в любое топологическое пространство (Y,σ) является τ -финально паракомпактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ - непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,σ) и (X,τ) - τ -финально паракомпактное пространство. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Тогда существует такое локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,τ), что $\gamma\succ\alpha$. Легко видеть, что для любого открытого покрытия β пространства (Y,σ) $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Итак, отображение f - является τ -финально паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ является τ -финально паракомпактным отображением топологического пространства (X,τ) в одноточечное топологическое пространство (Y,σ), то (X,τ) является τ -финально паракомпактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - τ -финально паракомпактное отображение топологического пространства (X,τ) в одноточечное топологическое пространство (Y,σ) и α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,σ) и локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Заметим, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma=\gamma$, так как $f^{-1}\beta=\{X\}$. Следовательно, $\gamma\succ\alpha$.

ТЕОРЕМА 1. Если f и (Y,σ) - τ -финально паракомпактны, то (X,τ) является τ -финально паракомпактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - любое открытое покрытие пространства (X,τ). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,σ) и локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. В открытое покрытие β впишем локально конечное открытое покрытие β_0 мощности $\leq \tau$ пространства (Y, σ). Легко видеть, что $f^{-1}\beta_0 \wedge \gamma \succ \alpha$. Положим $f^{-1}\beta_0 \wedge \gamma = \lambda$. Ясно, что λ является локально конечным открытым покрытием мощности $\leq \tau$ пространства (X, τ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется равномерно τ-финально паракомпактным, если для любого открытого покрытия α пространства (X,U) существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq \tau$ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется равномерно финально компактным, если для любого открытого покрытия α пространства (X,U) существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и счетное равномерно локально конечное открытое покрытие γ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно τ-финально паракомпактное отображение, то отображение $f:(X,\tau_U) \to (Y,\sigma_V)$ является τ-финально паракомпактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - любое открытое покрытие пространства (X,τ_U). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,σ_V) и равномерно локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq \tau$ пространства (X,τ_U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Ясно, что всякое равномерно локально конечное открытое покрытие является локально конечным открытым покрытием. Итак, $f:(X,\tau_U) \to (Y,\sigma_V)$ является τ-финально паракомпактным отображением.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно финально компактное отображение, то отображение $f:(X,\tau_U) \to (Y,\sigma_V)$ является финально компактным отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Всякое равномерное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно τ-финально паракомпактного пространства (X,U) в любое равномерное пространство (Y,V) является равномерно τ-финально паракомпактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и (X,U) - равномерно τ-финально паракомпактное пространство. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда существует такое равномерно локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq \tau$ пространства (X,U), что $\gamma \succ \alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ для любого открытого покрытия β пространства (Y,V). Следовательно, f - является равномерно τ-финально паракомпактным отображением.

СЛЕДСТВИЕ 2. Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно финально компактного пространства (X,U) в любое равномерное пространство (Y,V) является равномерно финально компактным отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $f:(X,U) \to Y$ является равномерно τ-финально паракомпактным отображением равномерного пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y = \{y\}$, то равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-финально паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - равномерно τ-финально паракомпактное отображение пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y = \{y\}$ и α - произвольное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq \tau$ пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Ясно, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$, где $f^{-1}\beta = \{X\}$. Следовательно, $\gamma \succ \alpha$. Значит, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-финально паракомпактным.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f:(X,U) \to Y$ является равномерно финально компактным отображением равномерного пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y=\{y\}$, то равномерное пространство (X,U) является равномерно финально компактным.

ТЕОРЕМА 3. Если f и (Y,V) - равномерно τ -финально паракомпактны, то (X,U) является равномерно τ -финально паракомпактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда найдутся такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно локально конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Так как (Y,V) является равномерно τ -финально паракомпактным пространством, то найдется такое равномерно локально конечное открытое покрытие λ мощности $\leq\tau$ пространства (Y,σ) вписанное в открытое покрытие β. Ясно, что $f^{-1}\lambda\wedge\gamma\succ\alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\lambda\wedge\gamma$ является равномерно локально конечным открытым покрытием мощности $\leq\tau$ пространства (X,U).

СЛЕДСТВИЕ 4. Если f и (Y,V) - равномерно финально компактны, то (X,U) является равномерно финально компактным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется равномерно сильно τ -финально паракомпактным, если для любого открытого покрытия α пространства (X,U) существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно звездно конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$.

При этом покрытие γ называется равномерно звездно конечным, если существует такое равномерное покрытие $\lambda\in U$, что любое $\gamma(L)$, $L\in\lambda$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия γ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $f:(X,U)\to Y$ равномерно сильно τ -финально паракомпактное отображение равномерного пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y=\{y\}$, то (X,U) также является равномерно сильно τ -финально паракомпактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - равномерно сильно τ -финально паракомпактное отображение пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y=\{y\}$. Пусть α - любое открытое покрытие пространства (X,U). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно звездно конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Ясно, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma=\gamma$, где $f^{-1}\beta=\{X\}$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно сильно τ -финально паракомпактным.

ТЕОРЕМА 4. Если f и (Y,V) - равномерно сильно τ -финально паракомпактны, то (X,U) является равномерно сильно τ -финально паракомпактным пространством. Обратно, если (X,U) является равномерно сильно τ -финально паракомпактным пространством, то равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в любое равномерное пространство (Y,V) является равномерно сильно τ -финально паракомпактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда найдутся такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно звездно конечное открытое покрытие γ мощности $\leq\tau$ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Так как (Y,V) является равномерно сильно τ -финально паракомпактным пространством, то найдется такое равномерно звездно конечное открытое покрытие λ мощности $\leq\tau$ пространства (Y,σ) вписанное в открытое покрытие β. Понятно, что $f^{-1}\lambda\wedge\gamma\succ\alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\lambda\wedge\gamma$ является равномерно звездно конечным открытым покрытием мощности $\leq\tau$ пространства (X,U). Обратно, пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и (X,U) - равномерно сильно τ -финально паракомпактное пространство. Пусть α - любое открытое покрытие пространства (X,U). Тогда найдется такое равномерно звездно конечное открытое покрытие γ мощности $\leq \tau$ пространства (X,U), что $\gamma \succ \alpha$. Очевидно, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ для любого открытого покрытия β пространства (Y,V). Итак, f - является равномерно сильно τ -финально паракомпактным отображением.

Отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется равномерно сильно паракомпактным, если для любого открытого покрытия α пространства (X,U) существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,V) и равномерно звездно конечное открытое покрытие γ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

ТЕОРЕМА 5. Если f и (Y,V) - равномерно сильно паракомпактны, то (X,U) является равномерно сильно паракомпактным пространством. Обратно, если (X,U) является равномерно сильно паракомпактным пространством, то равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в любое равномерное пространство (Y,V) является равномерно сильно паракомпактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательство теоремы 4.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990. - 172 с.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013. - 160 с.
3. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1981. - 432 с.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986. - 752 с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.А.