Чекеев А.А., Бейсенова Д.Р.

О СЕПАРАБЕЛЬНЫХ РАВНОМЕРНО ОТКРЫТЫХ БАЗАХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

A.A. Chekeev, D.R. Beisenova

ON SEPARABLE UNIFORMLY OPEN BASES OF UNIFORM SPACES

УДК: 515.12

Вводится определение сепарабельной равномерно открытой базы равномерного пространства

The definition of separable uniform open bases of uniform spaces is introduced

В равномерности $\mathscr{U}$ равномерного пространства uX множество всех счетных равномерных покрытий образуют базу равномерности $\mathscr{U}^c$ ([1]). Пусть $\mathbf{P}$ - комплект псевдометрик, порождающих равномерность $\mathscr{U}$. Через $\mathbf{P}^c$ обозначим множество сепарабельных псевдометрик из $\mathbf{P}$. Псевдометрика d псевдометрического пространства (X,d) называется *сепарабельной*, если сепарабельно его топологическое пространство (X,τ_d).

1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если на псевдометрическом пространстве* (X,d) *псевдометрика* d*-сепарабельна, то существует счетное множество* $\left\{x_n^d : n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq X$ *такое, что для любого* $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ *семейство* $\alpha_d^\varepsilon=\left\{O_d^\varepsilon\left(x_n^d\right): n\in\mathbb{N}\right\}$ *является открытым покрытием пространства* (X,τ_d).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть псевдометрика d псевдометричского пространства (X,d)-сепарабельна, т.е. топологическое пространство (X,τ_d)-сепарабельно. Тогда в X существует счетное всюду плотное подмножество $A=\left\{x_n^d : n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq X$. Пусть $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$-произвольно и рассмотрим семейство $\alpha_d^\varepsilon=\left\{O_d^\varepsilon\left(x_n^d\right): n\in\mathbb{N}\right\}$ - открытых ε - шаров в X. Для множества A имеем $[A]_X=X$. Тогда для любой точки $x\in X$ и ее открытой ε-окрестности $O_d^\varepsilon(x)=\{g: d(x,y)<\varepsilon\}$ имеем $O_d^\varepsilon(x)\cap A\neq\varnothing$. Следовательно, существует точка $x_n^d\in O_d^\varepsilon(x)\cap A$. Тогда $x\in O_d^\varepsilon\left(x_n^d\right)\in\alpha$, следовательно $\alpha_d^\varepsilon-$ открытое покрытие пространства (X,τ_d) Предложение доказано.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([1]). Псевдометрическое пространство uX называется $\tau-$*ограниченным*, если у псевдоравномерности существует база, состоящая из равномерных покрытий мощности $\leq\tau$.

3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ([1]). *Пусть* (X,d)*-пседометрическое пространство. Если псевдоравномерное пространство* u_dX *, где* $\mathscr{U}_d-$*псевдометрическая псевдоравномерность,* $\tau-$*ограниченно, то у топологии* τ_d *топологического пространства* (X,τ_d) *существует база мощности* $\leq\tau$ *, следовательно, существует всюду плотное подмножество мощности* $\leq\tau$.

3.1. СЛЕДСТВИЕ. *Если* (X,d) *такое псевдометрическое просранство, что псевдоравномерное пространство* u_dX, $\aleph_0$*-ограниченно, то топологическое пространство* (X,τ_d) *обладает счетной базой и, следовательно в* X *существует счетное всюду плотное подмножество, т.е.* (X,τ_d) *- сепарабельно.*

4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ([1]). *Если* $f: uX\to vY$ *равномерно непрерывное отображение* $\tau-$*ограниченного псевдоравномерного пространства* uX *на псевдоравномерное пространство* vY*, то* vY *также* $\tau-$*ограниченно.*

5. ТЕОРЕМА. *Пусть псевдометрика* d *равномерна относительно равномерности* $\mathscr{U}^c\subseteq\mathscr{U}$. *Тогда* d *- сепарабельная псевдометрика и* $\mathbf{d}\in\mathbf{P}^c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как псевдометрика d равномерна относительно равномерности $\mathscr{U}^c$, то псевдоравномерность $\mathscr{U}_d$, порожденная псевдометрикой d, содержится в равномерности $\mathscr{U}^c$ и тождественное отображение $1_X : u^c X \to u_d X -$ равномерно непрерывно. Равномерное пространство $u^c X - \aleph_0 -$ ограниченно, следовательно, $\aleph_0 -$ ограниченно псевдоравномерное пространство $u_d X$ (предложение 4) и по 3.1 топологическое пространство (X, τ_d) - сепарабельно. Это означает, чир псевдометрика $d -$ сепарабельна. Так как $d -$ равномерна относительно $\mathscr{U}^c$ и $\mathscr{U}^c \subseteq \mathscr{U}$, то $\mathbf{d} \in \mathbf{P}$ следовательно $\mathbf{d} \in \mathbf{P}^c$. Предложение доказано.

5.1. СЛЕДСТВИЕ. *Для каждой псевдометрики* $\mathbf{d} \in \mathbf{P}^c$ *существует такое счетное множество* $\{x_n^d : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$*, что семейство* $\alpha_d^\varepsilon = \{O_d^\varepsilon(x_n^d) : n \in \mathbb{N}\}$ *является равномерно открытым покрытием равномерного пространства* $u^c X$ *для любого* $\varepsilon \in \mathbb{N}^+$, *а семейство* $\mathscr{B}_{\mathbf{P}}^c = \{\{\alpha_d^\varepsilon = \{O_d^\varepsilon(x_n^d) : n \in \mathbb{N}\} : \varepsilon \in \mathbb{N}^+\} : d \in \mathbf{P}^c\}$ *является базой равномерности* $\mathscr{U}^c$.

6. ЗАМЕЧАНИЕ. *Аналогично теореме 3 статьи «О равномерно открытых базах равномерных пространств» доказывается, что семейство* $\overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}^c = \{\{\overline{\alpha}_d^\varepsilon = \{\overline{O}_d^\varepsilon(x_n^d) : n \in \mathbb{N}\} : \varepsilon \in \mathbb{N}^+\} : d \in \mathbf{P}^c\}$ *равномерно замкнутых покрытий также является базой равномерности* $\mathscr{U}^c$. *Базу* $\mathscr{B}_{\mathbf{P}^c}^c$ *будем просто обозначать через* $\mathscr{B}^c$, *каждое* $\alpha_d^\varepsilon \in \mathscr{B}_{\mathbf{P}^c}^c$ *через* $\alpha = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, *а базу* $\overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}^c}^c$ *будем обозначать через* $\overline{\mathscr{B}}^c$, *каждое* $\overline{\alpha}_d^\varepsilon \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}^c}^c$ *через* $\overline{\alpha} = \{\overline{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* uX *равномерное пространство и* $\mathscr{U}^c$*-равномерность на тихоновском пространстве* X *имеющая базой все счетные равномерные покрытия равномерности* $\mathscr{U}$. *Тогда* $\mathsf{Z}(uX) = \mathsf{Z}(u^c X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \in \mathsf{Z}(u^c X)$. Тогда существует такая функция $f \in C^*(u^c X)$, что $Z = f^{-1}(0)$. Тождественное отображение $1_x : uX \to u^c X$ равномерно непрерывно. Тогда функция $g = f \circ 1_x : uX \to \mathbb{R}$ - равномерно непрерывна и ограниченна, т.е. $f \in C^*(uX)$, и $g^{-1}(0) = (f \circ 1_X)^{-1}(0) = 1_X^{-1}(f^{-1}(0)) = = 1_X^{-1}(Z) = Z$. Итак, $Z \in \mathsf{Z}(uX)$ и выполнено включение $\mathsf{Z}(u^c X) \subseteq \mathsf{Z}(uX)$. Обратно, пусть $Z \in \mathsf{Z}(uX)$, т.е. существует такая функция $f \in C^*(uX)$, что $Z = f^{-1}(0)$. Естественная равномерность $\mathscr{U}_{\mathbb{R}}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ имеет базу $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, состоящую из счетных равномерных покрытий равномерности $\mathscr{U}_{\mathbb{R}}$. Так как функция $f : uX \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то для любого $\alpha \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(\alpha) \in \mathscr{U}$. Покрытие $f^{-1}(\alpha) -$ счетно, следовательно, $f^{-1}(\alpha) \in \mathscr{U}^c$. Тогда функция $f : u^c X \to \mathbb{R}$ также равномерно непрерывна и $Z = f^{-1}(0)$, т.е. $Z \in \mathsf{Z}(u^c X)$. Итак, имеет место включение $\mathsf{Z}(uX) \subseteq \mathsf{Z}(u^c X)$, что доказывает равенство $\mathsf{Z}(u^c X) = \mathsf{Z}(uX)$. Предложение доказано.

Литература:

1. Isbell, J.R. Uniform spaces.- Providence, 1964.- 175 p.
2. Энгелькинг, Р. Общая топология. - М.:Мир, 1986.- 744 с.
3. Charalambous, M.G. Uniform Dimension Function // Ph. D. Thesis. Univ. of London.-London, 1971.
4. Charalambous, M.G. A new covering dimension function for uniform spaces // J. London Math, Soc.- 1975.- Vol.11, №2.- P.137-143.
5. Charalambous, M.G. Further theory and application of covering dimension of uniform spaces // Czech. Math. J.- 1991.- Vol.41, №116.- P.378-394.

Рецензент: д.ф-м.н. Канетов Б.Э.