Чекеев А.А., Бейсенова Д.Р.

О РАВНОМЕРНО ОТКРЫТЫХ БАЗАХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

A.A. Chekeev, D.R. Beisenova

ON UNIFORMLY OPEN BASES OF UNIFORM SPACES

УДК: 515.12

Вводится определение равномерно открытой базы равномерного пространства.

The definition of uniform open bases of uniform spaces is introduced.

В статье исользуется обозначения и информация о равномерных пространствах из книги Дж.Исбелла ([1]) и общетопологическя информация из книги Р. Энгелькинга ([2]). За свойствами, определением равномерно открытых и равномерно замкнутых множеств отсылаем к работам М. Хараламбуса ([3]-[5]).

Пусть $(X,d)-$псевдометрическое пространство. Положим $x\sim y$ тогда и только тогда, когда $d(x,y)=0$. Отношение $"\sim"$ является отношением эквивалентности. Действительно, $\rho(x,x)=0$, следовательно $x\sim x$ для любого $x\in X$, т.е. $"\sim"$ - рефлексивно. Пусть $d(x,y)=0$, тогда $d(x,y)=d(y,x)=0$, т.е. если $x\sim y$, то $y\sim x$. Отношение $"\sim"$ - симметрично. Пусть $d(x,y)=0$ и $d(y,z)=0$, тогда, в силу аксиомы треугольника, $d(x,z)\le d(x,y)+d(x,z)=0$, т.е. $d(x,z)=0$. Итак, если $x\sim y$ и $y\sim z$, то $x\sim z$ и "□" является транзитивным отношением. Итак, отношение $"\sim"$ является отношением эквивалентности. Положим $\overline{X}=X/\sim$ - фактор – множество X по отношению эквивалентности $"\sim"$. Пусть $\overline{x},\overline{y}\in\overline{X}$ - произвольные элементы и $a\in\overline{x}, b\in\overline{y}-$также произвольные элементы. Тогда $d(x,z)\le d(x,a)+d(a,b)+d(b,y)=d(a,b)$ и $d(a,b)\le d(x,a)+d(x,y)+d(y,b)=d(x,y)$, т.е. для любого элемента a из класса эквивалентности $\overline{x}=\{x'\in X:\rho(x,x')=0\}$ точки x и для любого элемента b из класса эквивалентности $\overline{y}=\{y'\in X:\rho(y,y')=0\}$ точки y выполнено $\rho(x,y)=p(a,b)$, для любого $a\in\overline{x}$ и $b\in\overline{y}$. Это позволяет нам определить функцию $\overline{d}(\overline{x},\overline{y})=d(x,y)$. Из определения функции $\overline{d}$ имеем, $\overline{d}(\overline{x},\overline{y})\ge 0$ для любых $\overline{x},\overline{y}\in\overline{X}$, т.е. $\overline{d}$ есть отображение $\overline{d}:\overline{X}\times\overline{X}\to\mathrm{R}$. Выполнение аксиом (M1) и (M3) метрического пространства для функции $\overline{d}$ вытекает из ее определения. Аксиома (M2) также выполнена. Действительно, если $\overline{d}(\overline{x},\overline{y})=0$, то $d(a,b)=0$ для любых $a\in\overline{x}$ и $b\in\overline{y}$, следовательно, $\overline{x}=\overline{y}$. Обратное очевидно. Итак, $\overline{d}$ - метрика на $\overline{X}$. Пространство $(\overline{X},\overline{d})$ называется *ассоцированным метрическим пространством* с псевдометрическим пространством (X,d). Сопоставляя каждому элементу множества X класс эквивалентности, которому он принадлежит, определяется естестевенная проекция $\pi:X\to\overline{X}$. Для любого $\overline{x}\in\overline{X}$, имеем по определению $\pi^{-1}(\overline{x})=\{x'\in X:d(x,x')=0\}$, следовательно, π сюрьективное отображение.

1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для отображения* $\pi:(X,d)\to(\overline{X},\overline{d})$ *выполнены равенства*

$O_d^{\varepsilon}(x)=\pi^{-1}\left(O_{\bar{d}}^{\varepsilon}(\bar{x})\right)$ *и* $\bar{O}_d^{\varepsilon}(x)=\pi^{-1}\left(\bar{O}_{\bar{d}}^{\varepsilon}(\bar{x})\right)$, *где* $\pi(x)=\bar{x}$,

$$O_d^{\varepsilon}(x)=\{y:d(x,y)<\varepsilon\},\ \bar{O}_d^{\varepsilon}(x)=\{y:d(x,y)\le\varepsilon\} \text{ и}$$

$$O_d^{\varepsilon}(\bar{x})=\{\bar{y}:\bar{d}(\bar{x},\bar{y})<\varepsilon\},\ \bar{O}_d^{\varepsilon}(\bar{x})=\{\bar{y}:\bar{d}(\bar{x},\bar{y})\le\varepsilon\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства $d(x,y)=\bar{d}(\bar{x},\bar{y})$ для любых $x,y\in X$.

1.1. СЛЕДСТВИЕ. *Естественная проекция* $\pi:(X,d)\to(\bar{X},\bar{d})$ *является равномерно непрерывным отображением.*

1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $V\subset X$ *открытое подмножество псевдометрического пространства* (X,d). *Тогда* $V=\pi^{-1}(W)$, *где* $W\subset\bar{X}$ *открытое подмножество ассоциированного метрического пространства* $(\bar{X},\bar{d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из предложения 1. и того факта, что всякое открытое множество в псевдометрическихи метрических пространствах есть объединение некотрого семейства открытых шаров, а операция объединения сохраняется при переходе к прообразу.

1.3. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $F\subset X$ *замкнутое подмножество псевдометрического пространства* (X,d). *Тогда* $F=\pi^{-}(N)$, *где* $N\subset\bar{X}-$*замкнутое подмножество ассоциированного метрического пространства* $(\bar{X},\bar{d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F\subset X$ замкнуто в (X,d), тогда $X\setminus F$ открыто в (X,d), следовательно, существует такое открытое $W\subset\bar{X}$, что $X\setminus F=\pi^{-1}(W)$. Положим $N=\bar{X}\setminus W$. Тогда N замкнуто в $\bar{X}$ и $\pi^{-1}(N)=\pi^{-1}(\bar{X}\setminus W)=X\setminus\pi^{-1}(W)=X\setminus(X\setminus F)=F$, т.е. $F=\pi^{-1}(N)$ что и требовалось доказать.

2. ТЕОРЕМА. *Подмножество* $U\subset X$ *равномерного пространства* uX *равномерно открыто тогда и только тогда, когда* $U=f^{-1}(V)$, *где* $f:uX\to u_dM-$*равномерное непрерывное отображение* uX *в псевдометри-ческое пространство* (M,d) *и* $V\subset M$ *открыто в* M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U\subset X$ равномерно открыто, то из определения равномерно открытых множеств ([3]-[5])., т.к. всякое метрическое пространство является псевдо-метрическим, следует условие теоремы.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы, т.е. $U=f^{-1}(V)$, где $f:uX\to u_dM-$равномерно непрерывное отображение uX в псевдометрическое пространство (M,d) и $V\subset M$ открыто в M . Тогда в силу следствия 3.1.3., $V=\pi^{-1}(W)$, где $\pi:(M,d)\to(\bar{M},\bar{d})-$ естественная проекция и $W\subseteq\bar{M}-$открыто в ассоциированном метрическом пространстве $(\bar{M},\bar{d})$. Пусть $g=\pi\circ f$. Тогда отображение $g : uX \to \bar{u}_d \bar{M}$ равномерно непрерывно и $U = g^{-1}(W)$, т.е. $U -$ равномерно открыто. Теорема доказана.

2.1. СЛЕДСТВИЕ. *Подмножество* $F \subset X$ *равномерного пространства* uX *равномерно замкнуто тогда и только тогда, когда* $F = g^{-1}(N)$, *где* $g : uX \to u_d M$ *- равномерно непрерывное отображение* uX *в псевдометрическое пространство* (M, d) *и* $N \subset M$ *замкнуто в* M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2. с применением следствия 1.3.

Для всякого равномерного пространства uX семейство $\mathscr{B}_{\mathbf{n}} = \left\{ \left\{ \alpha_d^\varepsilon = \left\{ O_d^\varepsilon(x) : x \in X \right\} : \varepsilon \in^{+} \right\} : d \in \mathbf{n} \right\}$,

где $\mathbf{P}$ - комплект псевдометрик, порождающих равномерность $\mathscr{U}$, образует базу равномерности $\mathscr{U}$. С учетом теоремы 2. и следствия 2.1. имеет место следствие .

2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $\mathbf{P}$ *- комплект псевдометрик, порождающих равномерность* $\mathscr{U}$ *равномерного пространства* uX. *Тогда семейство* $\mathscr{B}_{\mathbf{n}} = \left\{ \left\{ \alpha_d^\varepsilon = \left\{ O_d^\varepsilon(x) : x \in X \right\} : \varepsilon \in \mathbf{n}^{+} \right\} : d \in \mathbf{n} \right\}$ *образует базу равномерности* $\mathscr{U}$ *и каждое* $\alpha_d^\varepsilon \in \mathscr{B}_{\mathbf{P}}$ *—равномерно открытое покрытие, где* $O_d^\varepsilon(x) = \left\{ y : d(x, y) < \varepsilon \right\}$ *открытый* ε *- шарпо пседометрике* $d \in \mathbf{P}$, *для каждого* $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для любой псевдометрики $d \in \mathbf{P}$, $\mathscr{U}_d -$ псевдоравномерность, порожденная псевдометрикой d. Тогда тождественное отображение $1_X : uX \to u_d X -$ равномерно непрерывно. Для любых $x \in X$ и $\varepsilon \in \square^{+}$, открытый $\varepsilon -$ шар $O_d^\varepsilon(x)$ открыт в псевдометрическом пространстве (X, d), следовательно $O_d^\varepsilon(x)$ - равномерно открыто в равномерном пространстве uX для любых $x \in X$ и $\varepsilon \in \square^{+}$. Следовательно каждое покрытие $\alpha_d^\varepsilon -$ равномерно открыто.

3. ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathbf{P}$ *комплект псевдометрик, порождающих равномерность* $\mathscr{U}$ *равномерного пространства* uX. *Тогда семейство* $\bar{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}} = \left\{ \left\{ \bar{\alpha}_d^\varepsilon = \left\{ \bar{O}_d^\varepsilon(x) : x \in X \right\} : \varepsilon \in \square^{+} \right\} : d \in \mathbf{P} \right\}$ *образует базу равномерности* $\mathscr{U}$ *и каждое* $\bar{\alpha}_d^\varepsilon \in \bar{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ *— равномерно замкнутое покрытие, где* $O_d^\varepsilon(x) = \left\{ y : d(x, y) \le \varepsilon \right\}$ *- замкнутый* $\varepsilon -$ *шар по пседометрике* $d \in \mathbf{P}$, *для каждого* $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для любой псевдометрики $d \in \mathbf{P}$, $\mathscr{U}_d -$ псевдоравномерность, порожденная псевдометрикой d. Тогда тождественное отображение $1_X : uX \to u_d X$ равномерно непрерывно. Для любых $x \in X$ и $\varepsilon \in \square^{+}$ замкнутый $\varepsilon -$ шар $\bar{O}_d^\varepsilon(x) = \left\{ y : d(x, y) \le \varepsilon \right\}$ замкнут в псевдометрическом пространстве (X, d), следовательно (2.1.), $\bar{O}_d^\varepsilon(x) -$ равномерно замкнуто в равномерном пространстве uX для любого $x \in X$ и $\varepsilon \in \square^{+}$. Следовательно каждое $\bar{\alpha}_d^\varepsilon = \left\{ \bar{O}_d^\varepsilon(x) : x \in X \right\} \in \bar{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ равномерно замкнутое покрытие для любого $\varepsilon \in \square^{+}$ и $d \in \mathbf{P}$.

Так как покрытие α_d^ε вписано в $\bar{\alpha}_d^\varepsilon$ для любого $\varepsilon \in \square^{+}$ и $d \in \mathbf{P}$, то $\bar{\alpha}_d^\varepsilon$ является равномерным покрытием, т.е. $\overline{\alpha}_{d}^{\varepsilon} \in \mathscr{U}$. Покажем, что семейство $\overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}} = \left\{ \overline{\alpha}_{d}^{\varepsilon} : \varepsilon \in \square^{+}, d \in \mathbf{P} \right\}$ есть база равномерности $\mathscr{U}$. Пусть $\alpha \in \mathscr{U}$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует такое $\alpha_{d}^{\varepsilon} \in \mathscr{B}_{\mathbf{P}}$, что α_{d}^{ε} вписано в α. Поскольку $\mathscr{B}_{\mathbf{P}} -$ база равномерности, то существует такое $\beta_{\rho}^{\delta} \in \mathscr{B}_{\mathbf{P}}$, что β_{ρ}^{δ} сильно звездно вписано в α_{d}^{ε}, где $\beta_{\rho}^{\delta} = \left\{ O_{\rho}^{\delta}(x) : x \in X \right\}$ и $O_{\rho}^{\delta}(x) = \left\{ y : g(x,y) < \delta \right\}$ открытый $\delta -$шар по псевдометрике $\rho \in \mathbf{P}$. Это означает, что покрытие $\beta_{\rho}^{\delta} = \left\{ \beta_{\rho}^{\delta}\left(O_{\rho}^{\delta}(x) \right) : x \in X \right\}$ вписано в α_{d}^{ε}. Имеем, $O_{\rho}^{\delta}(x) \subset \overline{O}_{\rho}^{\delta}(x) = \left\{ y : \rho(x,y) \leq \delta \right\}$ и $\overline{O}_{\rho}^{\delta}(x) \subset \left[O_{\rho}^{\delta}(x) \right]_{X} \subset \beta_{\rho}^{\delta}\left(O_{\rho}^{\delta}(x) \right)$ для любого $x \in X$. Это означает, что покрытие $\overline{\beta}_{\rho}^{\delta} = \left\{ \overline{O}_{\rho}^{\delta}(x) : x \in X \right\}$ вписано в покрытие α_{d}^{ε}, следовательно, $\overline{\beta}_{\rho}^{\delta}$ вписано в α. Пусть $\overline{\alpha}_{d_1}^{\varepsilon_1}, \overline{\alpha}_{d_2}^{\varepsilon_2} \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ - произвольные покрытия. Так как $\alpha_{d_1}^{\varepsilon_1}$ вписано в $\overline{\alpha}_{d_1}^{\varepsilon_1}$ и $\alpha_{d_2}^{\varepsilon_2}$ вписано в $\overline{\alpha}_{d_2}^{\varepsilon_2}$, то $\alpha_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \alpha_{d_2}^{\varepsilon_2}$ вписано в $\overline{\alpha}_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \overline{\alpha}_{d_2}^{\varepsilon_2}$. Пусть $\alpha_{d_3}^{\varepsilon_3}$ сильно звездно вписано в $\alpha_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \alpha_{d_2}^{\varepsilon_2}$, т.е. покрытие $\left\{ \alpha_{d_3}^{\varepsilon_3}\left(O_{d_3}^{\varepsilon_3}(x) \right) : x \in X \right\}$ вписано $\alpha_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \alpha_{d_2}^{\varepsilon_2}$. Тогда имеем $O_{d_3}^{\varepsilon_3}(x) \subset \overline{O}_{d_3}^{\varepsilon_3}(x)$ и $\overline{O}_{d_3}^{\varepsilon_3}(x) \subset \left[O_{d_3}^{\varepsilon_3}(x) \right]_{X} \subset \alpha_{d_3}^{\varepsilon_3}\left(O_{d_3}^{\varepsilon_3}(x) \right)$ для любого $x \in X$. Это означает, что, т.к. покрытие $\left\{ \alpha_{d_3}^{\varepsilon_3}\left(O_{d_3}^{\varepsilon_3}(x) \right) : x \in X \right\}$ вписано $\alpha_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \alpha_{d_2}^{\varepsilon_2}$, покрытие $\overline{\alpha}_{d_3}^{\varepsilon_3}$ вписано в $\alpha_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \alpha_{d_2}^{\varepsilon_2}$, а следовательно и в покрытие $\overline{\alpha}_{d_1}^{\varepsilon_1} \wedge \overline{\alpha}_{d_2}^{\varepsilon_2}$. Пусть $\overline{\alpha}_{d}^{\varepsilon} \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ - произвольное равномерное покрытие, тогда $\alpha_{d}^{\varepsilon} \in \mathscr{B}_{\mathbf{P}}$ и α_{d}^{ε} вписано в $\overline{\alpha}_{d}^{\varepsilon}$. Так как $\mathscr{B}_{\mathbf{P}} -$ база равномерности, то существует $\beta_{\rho}^{\delta} \in \mathscr{B}_{\mathbf{P}}$ такое, что β_{ρ}^{δ} дважды сильно звездно вписано в α_{d}^{ε}, т.е. покрытие $\left\{ \beta_{\rho}^{\delta}\left(\beta_{\rho}^{\delta}\left(O_{\rho}^{\delta}(x) \right) : x \in X \right) \right\}$ вписано в покрытие α_{d}^{ε}, где $\beta_{\rho}^{\delta} = \left\{ O_{\rho}^{\delta}(x) : x \in X \right\}$. Для любого $x \in X$ для покрытия $\beta_{\rho}^{\delta} = \left\{ O_{\rho}^{\delta}(x) : x \in X \right\}$ имеем $O_{\rho}^{\delta}(x) \subset \overline{O}_{\rho}^{\delta}(x) \subset \left[O_{\rho}^{\delta}(x) \right]_{X} \subset \beta_{\rho}^{\delta}\left(O_{\rho}^{\delta}(x) \right)$, следовательно, $\overline{\beta}_{\rho}^{\delta}\left(\overline{O}_{\rho}^{\delta}(x) \right) \subset \beta_{\rho}^{\delta}\left(\beta_{\rho}^{\delta}\left(O_{\rho}^{\delta}(x) \right) \right)$ для любого $x \in X$. Это означает, что покрытие $\left\{ \overline{\beta}_{\rho}^{\delta}\left(\overline{O}_{\rho}^{\delta}(x) \right) : x \in X \right\}$ вписано в покрытие α_{d}^{ε} и, следовательно, в покрытие $\overline{\alpha}_{d}^{\varepsilon}$. Итак, $\overline{\beta}_{\rho}^{\delta} \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ - покрытие, сильно звездно вписанное в покрытие $\overline{\alpha}_{d}^{\varepsilon}$. Вышедоказанное показывает, что для семейство $\overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ выполнены все аксиомы базы равномерности и $\overline{\mathscr{B}}_{\mathbf{P}}$ является базой равномерности $\mathscr{U}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Isbell, J.R. Uniform spaces.- Providence, 1964.- 175 p.
2. Энгелькинг, Р. Общая топология. - М.:Мир, 1986.- 744 с.
3. Charalambous, M.G. Uniform Dimension Function // Ph. D. Thesis. Univ. of London.-London, 1971.
4. Charalambous, M.G. A new covering dimension function for uniform spaces // J. London Math, Soc.- 1975.- Vol.11, №2.- P.137-143.
5. Charalambous, M.G. Further theory and application of covering dimension of uniform spaces // Czech. Math. J.- 1991.- Vol.41, №116.- P.378-394.

Рецензент: д.ф-м.н. Канетов Б.Э.