Асанов А., Толубаев Ж.О.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

A. Asanov, Zh.O. Tolubaev

ON A CLASS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER VOLTERRA-STIELTIES TRANSFORM ON THE HALF-AXIS

УДК 517. 968

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности производной решения линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра-Стильтьеса к пространству $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$.

Ключевые слова: *производная по возрастающей функции, интегро-дифференциальное уравнения второго порядка типа Вольтерра-Стильтьеса, полуось .*

In this paper, based on the notion of derivative of an increasing function and the method of transformation equations established sufficient conditions for the solutions of linear integro-differential equations of second order Volterra-Stieltjes in space $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнения второго порядка типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau)=f(t),\quad t\ge t_0 \tag{1}$$

$$x(t_0)=c,\qquad x'(t_0)=x_1 \tag{2}$$

где интеграл является интегралом Стильтьеса, $K(t,\tau)$, $f(t)$, $a(t)$ *è* $b(t)$ – заданные при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$ непрерывные функции, $g(t)$– заданная возрастающая непрерывная функция при $t\ge t_0$ и $g(t_0)=0$, $x(t)$ – искомая функция.

Здесь $x'(t), x''(t)$ определяются следующими равенствами

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dg(t)}\frac{dg(t)}{dt}=g'(t)\frac{dx(t)}{dg(t)}$$

$$x''(t)=\left[\frac{d^2x(t)}{dg^2(t)}g'(t)+\frac{dx(t)}{dg(t)}(g'(t))'_{g(t)}\right]g'(t)$$

Все фигурирующие функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$

Вопрос ограниченности и принадлежности к пространству $L^2[t_0,\infty)$ решения для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразования уравнений исследованы в работе [1-7].

Вопрос ограниченности и принадлежности к пространству $L^2_g[t_0,\infty)$ решений линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стильтьеса, методом преобразования уравнений исследованы в работе [10].

Введем обозначения: $C[t_0,\infty)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций на $[0,\infty)$, $C(G)$ – пространство непрерывных функций на $G=\{(t,\tau): t_0\le\tau\le t<\infty\}$

Ниже приведем определение и теорему $[9]$, которые будем использовать в данной работе. Пусть функции $f(x)$ и $g(\tilde{o})$ определены на интервале (a,b). Будем предполагать, что функция $g(\tilde{o})$ - строго возрастающая непрерывная функция всюду на интервале (a,b). Возьмем точку $x \in (a,b)$. Зададим x приращение $\Delta(x) \neq 0$ тогда функции $f(x)$ и $g(\tilde{o})$ получат приращения $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ и $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$

Определение. Производной по $g(\tilde{o})$ функции $f(x)$ в точке $x \in (a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta g(\tilde{o})$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует): $f'_{g(x)}(x) = \dfrac{df(x)}{dg(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)}$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x)$ - непрервная функция на сегменте $[a;b]$ и

$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t), \quad x \in [a;b]$$

тогда $F'_{g(x)}(x) = \left(\int_a^x f(t)dg(t) \right)'_{g(x)} = f(x), \quad x \in [a;b]$

где $F'_{g(x)}(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{F(a+\Delta x) - F(a)}{g(a+\Delta x) - g(a)}, \quad F'_{g(x)}(b) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{F(b+\Delta x) - F(b)}{g(b+\Delta x) - g(b)}$

ЗАДАЧА. В данной работе рассматривается и исследуется методом преобразований уравнений, достаточные условия принадлежности решения к пространству $L_g^2[t_0,\infty)$ линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка (1) типа Вольтерра-Стильтьеса, где $x(t) \in L^2{}_g(t_0,\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_0}^{\infty} x^2(t)dg(t) < \infty$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка (1) выполняются следующие условия

1) $g'(t) \geq 0 \quad для\, всех \quad t \in [t_0,\infty), \; b(t) \geq 0 \; при\, всех\, t \in [t_0,\infty)$

2) $a(t) - \frac{1}{2}[g'(t)]'_{g(t)} \geq \alpha > 0 \, при \, всех \, t \in [t_0,\infty), \; \alpha - постоянная, [b(s)g'(s)]'_{g(s)} \leq 0 \; при \, s \in [t_0,\infty)$

3) $K(t,t_0) \geq 0 \quad для\, всех \quad t \in [t_0,\infty), \quad K'_{g(t)}(t,s), \, K'_{g(s)}(t,s), \, K''_{g(t)g(s)}(t,s) \in C(G),$

$где \; K'_{g(t)}(t,s) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{K(t+\Delta t, s) - K(t,s)}{g(t+\Delta t) - g(t)}, \quad K'_{g(s)}(t,s) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{K(t, s+\Delta s) - K(t,s)}{g(s+\Delta s) - g(s)}$

4) $K'_{g(t)}(t,t_0) \leq 0 \qquad для\, всех \qquad t \in [t_0,\infty)$

5) $K'_{g(\tau)}(t,\tau) \geq 0 \; и \; K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau) \leq 0 \quad для\, всех \quad (t,\tau) \in G = \{(t,\tau): t_0 \leq \tau \leq t < \infty\}$

6) $f(t) \in L^2{}_g[t_0,\infty)$.

Тогда для решения $x(t)$ линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка **(1)** $x'(t)$ принадлежит к пространству $L_g{}^2[t_0,\infty)$ и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t} |x'(s)| dg(s) \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} |f(s)|^2 dg(s) + \frac{x_1^2}{2} g'(t_0) + \frac{c^2}{2} b(t_0) g(t_0) \right\}$$

Доказательство. Подставляя значения $x'(t), x''(t)$ в уравнение (1) имеем

$$\frac{d^2x(t)}{dg^2(t)}[g'(t)]^2+\left[[g(t)]'_{g(t)}+a(t)\right]\frac{dx(t)}{dg(t)}g'(t)+b(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau)=f(t),$$

Далее применяя метод преобразования уравнений рассмотренных в работе [1] и умножая уравнения **(1)** на $x'(t)$ и затем интегрируем от t_0 до t получаем:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}[g'(s)]^2x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left[(g'(s))'_{g(s)}+a(s)\right]g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}x'(s)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}b(s)x(s)x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x'(\tau)x'(s)dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}f(s)x'(s)dg(s) \qquad (3)$$

Для вычисления двух первых интегралов в левой части соотношения (3) применяем метод интегрирования по частям и получим:

$$a)\int_{t_0}^{t}\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}[g'(s)]^2x'(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}x''_{g^2(s)}(s)[g'(s)]^2x'_{g(s)}(s)g'(s)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[(x'_{g(s)}(s))^2\right]'_{g(s)}[g'(s)]^3dg(s)=\left|\begin{array}{l}u(s)=[g'(s)]^3\\ du(s)=\left[[g'(s)]^3\right]'_{g(s)}dg(s)=\\ =3[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}dg(s)\\ dv(s)=\left[(x'_{g(s)}(s))^2\right]'_{g(s)}dg(s)\\ v(s)=(x'_{g(s)}(s))^2\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}[x'_{g(s)}(s)]^2[g'(s)]^3\Big|_{s=t_0}^{s=t}-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}[x'_{g(s)}(s)]^2[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x'(s)}{g'(s)}\right]^2[g'(s)]^2[g'(s)]\Big|_{s=t_0}^{s=t}-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{x'(s)}{g'(s)}\right]^2[g'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}[x'(t)]^2[g'(t)]-\frac{1}{2}[x'(t_0)]^2[g'(t_0)]-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}[x'(t)]^2[g'(t)]-\frac{x_1^2}{2}[g'(t_0)]-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2[g'(s)]'_{g(s)}dg(s)$$

$$b)\int_{t_0}^{t}\left[[g'(s)]'_{g(s)}+a(s)\right]\frac{dx(s)}{dg(s)}g'(s)x'(s)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[[g'(s)]'_{g(s)}+a(s)\right]x'_{g(s)}(s)g'(s)g'(s)x'_{g(s)}(s)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[[g'(s)]'_{g(s)}+a(s)\right][x'_{g(s)}(s)]^2[g'(s)]^2dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[[g'(s)]'_{g(s)}+a(s)\right]\left[\frac{x'(s)}{g'(s)}\right]^2[g'(s)]^2dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[[g'(s)]'_{g(s)}+a(s)\right][x'(s)]^2dg(s)=\int_{t_0}^{t}[g'(s)]'_{g(s)}[x'(s)]^2dg(s)+\int_{t_0}^{t}a(s)[x'(s)]^2dg(s)$$

$$c)\ \int_{t_0}^{t} b(s)x(s)x'(s)dg(s)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} b(s)g'(s)\left[x^2(s)\right]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u(s)=b(s)g'(s)\\ du(s)=\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)\\ dv(s)=\left[x^2(s)\right]'_{g(s)}dg(s)\\ v(s)=x^2(s)\end{array}\right|=\frac{1}{2}b(s)g'(s)x^2(s)\ \Big|_{s=t_0}^{s=t}-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} x^2(s)\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}b(t)g'(t)x^2(t)-\frac{c^2}{2}b(t_0)g'(t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} x^2(s)\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)$$

Подставляя последние полученные соотношения в (3), вычесляем значение суммы трех первых интегралов

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}\left[g'(s)\right]^2x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left[\left(g'(s)\right)'_{g(s)}+a(s)\right]g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}x'(s)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t} b(s)x(s)x'(s)dg(s)=\frac{1}{2}\left[x'(t)\right]^2\left[g'(t)\right]-\frac{x_1^2}{2}\left[g'(t_0)\right]-\frac{3}{2}\int_{t_0}^{t}\left[x'(s)\right]^2\left[g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[g'(s)\right]'_{g(s)}\left[x'(s)\right]^2dg(s)+\int_{t_0}^{t} a(s)\left[x'(s)\right]^2dg(s)+\frac{1}{2}b(t)g'(t)x^2(t)-$$

$$-\frac{1}{2}b(t_0)g'(t_0)c^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} x^2(s)\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[x'(t)\right]^2\left[g'(t)\right]-\frac{x_1^2}{2}\left[g'(t_0)\right]+\frac{1}{2}b(t)g'(t)x^2(t)-$$

$$-\frac{c^2}{2}b(t_0)g'(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[a(s)-\frac{1}{2}\left[g(s)\right]'_{g(s)}\right]\left[x'(s)\right]^2dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} x^2(s)\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d^2x(s)}{dg^2(s)}\left[g'(s)\right]^2x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left[\left(g'(s)\right)'_{g(s)}+a(s)\right]g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)}x'(s)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t} b(s)x(s)x'(s)dg(s)=\frac{1}{2}\left[x'(t)\right]^2g'(t)-\frac{x_1^2}{2}g'(t_0)+\frac{1}{2}b(t)g'(t)x^2(t)-$$

$$-\frac{c^2}{2}b(t_0)g'(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[a(s)-\frac{1}{2}\left[g(s)\right]'_{g(s)}\right]\left[x'(s)\right]^2dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} x^2(s)\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}dg(s)\quad (4)$$

Подставляя (4) в соотношение (3) получим

$$\frac{1}{2}\left[x'(t)\right]^2g'(t)+\frac{1}{2}b(t)g'(t)x^2(t)+\int_{t_0}^{t}\left[a(s)-\frac{1}{2}\left[g(s)\right]'_{g(s)}\right]\left[x'(s)\right]^2dg(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[b(s)g'(s)\right]'_{g(s)}x^2(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x'(\tau)x'(s)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t} f(s)x'(s)dg(s)+\frac{x_1^2}{2}\left[g'(t_0)\right]+\frac{c^2}{2}b(t_0)g'(t_0)$$

Для вычисления двойного интеграла в последнем соотношении, применим следующие равенства, которые рассмотрены в работе [8] для операторных уравнений Вольтерра:

$$1.\ \frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)x'(s)\right]=K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)x(s)+K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)x(s), \qquad (s,\tau)\in G$$

Из последного тождества следует, что

$$K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)x'(s)=\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)x'(s)\right]-K'_{g(\tau)}(x,s)z(s,\tau)x'(s) \tag{5}$$

где
$$z(s,\tau)=\int_{\tau}^{s}x'(t)dg(t). \tag{6}$$

Из теоремы 1 следует

$$z'_{g(\tau)}(s,\tau)=-x'(\tau), \tag{7}$$

$$z'_{g(s)}(s,\tau)=x'(s). \tag{8}$$

$$2.\ \frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)z(s,\tau)\right]=K'_{g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)+2K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau), \qquad (s,\tau)\in G$$

Из последнего тождество следует, что

$$K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z^2(s,\tau)\right]-\frac{1}{2}\left[K'_{g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)\right] \tag{9}$$

где $K'_{g(\tau)}(s,\tau)$ – производная по возрастающей функции $g(\tau)$ [9] ,

$$K'_{g(\tau)}(s,\tau)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{K(s,\tau+\Delta\tau)-K(s,\tau)}{g(\tau+\Delta\tau)-g(\tau)}.$$

Применяя формулы (5), (6), (7), (8) и (9) и проинтегрировав методом по частям имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x'(\tau)x'(s)dg(\tau)dg(s)=-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)x'(s)dg(\tau)dg(s)=-\int_{t_0}^{t}x'(s)\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}z'_{g(s)}(s,\tau)[K(s,\tau)z(s,\tau)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=s}-\int_{t_0}^{s}z(s,\tau)K'_{g(\tau)}(s,\tau)dg(\tau)]dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}z'_{g(s)}(s,t_0)K(s,t_0)z(s,t_0)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[K(s,t_0)z(s,t_0)z(s,t_0)]dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0)z(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{d}{dg(s)}[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)]dg(\tau)dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)]dg(s)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\int_{\tau}^{t}\frac{d}{dg(s)}[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)]dg(s))dg(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)z^2(t,\tau)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)$$

Отсюда для последнего двойного интеграла имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x'(\tau)x'(s)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)z^2(t,\tau)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s) \qquad (10)$$

В силу условий теоремы 1) 2) и 3) из (4) соотношения имеем

$$\alpha\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2dg(s)\le\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|f(s)|\sqrt{\varepsilon}|x'(s)|dg(s)+\frac{x_1^2}{2}g'(t_0)+\frac{c^2}{2}b(t_0)g'(t_0) \qquad (11)$$

Далее применяя неравенство Коши-Буняковского для интегралов

$$\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varepsilon}|f(s)|\varepsilon|x'(s)|g'(s)dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|f(s)|^2dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)$$

из (11) получаем

$$\alpha\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|f(s)|^2dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)+\frac{x_1^2}{2}g'(t_0)+\frac{c^2}{2}b(t_0)g'(t_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}|x'(s)|dg(s)\le\frac{1}{\alpha-\varepsilon}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|f(s)|^2dg(s)+\frac{x_1^2}{2}g'(t_0)+\frac{c^2}{2}b(t_0)g(t_0)\right\}$$

где ε произвольное число из $(0,\alpha)$.

Теорема 2 доказана.

Пример. *Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнения второго порядка типа Вольтерра-Стильтьеса (1) при*

$$t_0=1,\quad g(t)=\sqrt{t},\ a(t)=\sqrt{t}+1,\ b(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\ \ и\ \ K(t,s)=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1},$$

т.е. следующую линейное интегро-диффернциальное уравнения второго порядка типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x''(t)+\left(\sqrt{t}+1\right)x'(t)+\frac{1}{\sqrt{t}}x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}+1}x'(\tau)dg(\tau)=f(t),\quad t\geq 0 \qquad (1)$$

$$x(1)=c,\quad x'(1)=x_1 \qquad (2)$$

Проверим выполнение условий теоремы 2:

$$g(t)=\sqrt{t}\quad,\ g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}},\ \left(g'(t)\right)'_{g(t)}=-\frac{1}{2t},\ \left[b(t)g'(t)\right]'_{g(t)}=-\frac{1}{2t\sqrt{t}},$$

$$a(t)-\frac{1}{2}\left[g'(t)\right]'_{g(t)}=\sqrt{t}+\frac{1}{2t}+1$$

1) $g(t)=\sqrt{t}\geq 0,\ \ \forall t\in[1,\infty);$ 2) $b(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\geq 0,\ \ \forall t\in[1,\infty);$

3) $a(t)-\dfrac{1}{2}\left[g'(t)\right]'_{g(t)}=\sqrt{t}+\dfrac{1}{2t}+1\geq 2>0,\ \ \forall t\in[1,\infty),$ ò .å. $\alpha=2$

4) $\left[b(t)g'(t)\right]'_{g(t)}=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}\leq 0,\ \forall t\in[1,\infty)$

$$K(t,1)=\frac{1}{\sqrt{t}+1}\geq 0,\quad K'_{g(t)}(t,1)=-\frac{1}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}\leq 0,$$

$$K'_{g(s)}(t,s)=\frac{1}{\sqrt{t}+1}\geq 0,\ K''_{g(t)g(s)}(t,s)=-\frac{1}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}\leq 0,$$

Из этого следует что, выполняется все условие теоремы 2.

Литература

[1]. Искандаров С. Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1978. –№ 3. – С.3О-33.

[2]. Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро- дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе:Илим, 1980. –Вып.13. – С.185-192.

[3]. Искандаров С. К вопросу о принадлежности пространству $L^2[t_0,\infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра // Там же. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 193-198.

[4]. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68–103.

[5]. Винокуров В.Р. Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра //Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, №10. – С. 1732-1744.

[6]. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений //Мат. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – С.103-107.

[7]. Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтерра //Мат. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. – С.63-71.

[8]. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 13–18.

[9]. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы / Кыргызско-Турецкий ун-т «Манас». – Бишкек, 2001. – С. 18-64.

[10]. Толубаев Ж.О «Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стильтьеса на полуоси» // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып.43 / Отв.ред.М.Иманалиев; НАН КР, ИТПМ.- Бишкек: Илим, 2010.- С. 40-46.

Рецензент: к.ф-м.н. Сулайманов Б.Э.