Толубаев Ж.О.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

Zh.O. Tolubaev

ON A CLASS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER VOLTERRA-STIELTJES TRANSFORM ON THE HALF-AXIS

УДК 517. 968

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности производной решения линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стильтьеса к пространству $L^2{}_{n,g}[t_0,\infty)$.

Ключевые слова: *производная по возрастающей функции, интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа Вольтерра-Стильтьеса, полуось.*

In this paper, based on the notion of derivative of an increasing function and the method of transformation equations established sufficient conditions for the derivative of the solution of linear integro-differential equation of the first order Volterra-Stieltjes to space $L^2{}_{n,g}\left[t_{0,}\infty\right)$

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнения первого порядка типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)[x'(\tau)+b(\tau)x(\tau)]dg(\tau)=f(t),\quad t\ge t_0 \tag{1}$$

$$x(t_0)=c \tag{2}$$

где интеграл является интегралом Стильтьеса, $a(t),b(t),K(t,\tau)$ è $f(t)-$ заданные при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$ непрерывные функции, $g(t)-$ заданная возрастающая непрерывная функция при $t\ge t_0$, $x(t)-$ искомая функция.

Здесь $x'(t)$ определятся следующим равенством $x'(t)=\dfrac{dx(t)}{dg(t)}\dfrac{dg(t)}{dt}=g'(t)\dfrac{dx(t)}{dg(t)}$

Все фигурирующие функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$

Вопрос ограниченности и принадлежности к пространству $L^2[t_0,\infty)$ решения для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразования уравнений исследованы в работе [1-7].

Введем обозначения: $C[t_0,\infty)-$ пространство непрерывных функций на $[0,\infty)$, $C(G)-$ пространство непрерывных функций на $G=\{(t,\tau):t_0\le\tau\le t<\infty\}$

Ниже приведем определение и теорему $[9]$, которые будем использовать в данной работе. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b). Будем предполагать, что функция $g(x)$- строго возрастающая непрерывная функция всюду на интервале (a,b). Возьмем точку $x\in(a,b)$. Зададим x приращение $\Delta(x)\neq 0$ тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ получат приращения $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ и $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$.

Определение. Производной по $g(x)$ функции $f(x)$ в точке $x\in(a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta g(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует): $f'_{g(x)}(x)=\dfrac{df(x)}{dg(x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{g(x+\Delta x)-g(x)}$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x)$ - непрервная функция на сегменте $[a;b]$ и

$$F(x)=\int_a^x f(t)dg(t),\quad x\in[a;b]$$

тогда $\quad F'_{g(x)}(x)=\left(\int_a^x f(t)dg(t)\right)'_{g(x)}=f(x),\quad x\in[a;b]$

где $F'_{g(x)}(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{F(a+\Delta x)-F(a)}{g(a+\Delta x)-g(a)},\quad F'_{g(x)}(b)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{F(b+\Delta x)-F(b)}{g(b+\Delta x)-g(b)}$

ЗАДАЧА. В данной работе рассматривается и исследуется методом преобразований уравнений, достаточные условия принадлежности решения $x(t)$ линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (1) типа Вольтерра-Стильтьеса к пространству $L^2{}_g[t_0,\infty)$, где $x(t)\in L^2{}_g(t_0,\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_0}^{\infty} x^2(t)\,dg(t)<\infty$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (1) выполняются следующие условия

1) $g'(t)\ge 0$ *и* $\quad [a(t)+b(t)]\ge 0$ *при всех* $t\in[t_0,\infty)$;

2) $a(t)b(t)-\dfrac{1}{2}\{[a(t)+b(t)]g'(t)\}'_{g(t)}\ge\alpha>0$ *при* $t\in[t_0,\infty)$, $\alpha-$ *постоянная*;

3) $K(t,t_0)\ge 0$ *для всех* $t\in[t_0,\infty)$, $\quad K'_{g(t)}(t,s),\ K'_{g(s)}(t,s),\ K''_{g(t)g(s)}(t,s)\in C(G)$,

где $K'_{g(t)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{K(t+\Delta t)-K(t,s)}{g(t+\Delta t)-g(t)},\quad K'_{g(s)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{K(t,s+\Delta s)-K(t,s)}{g(s+\Delta s)-g(s)}$

4) $K'_{g(t)}(t,t_0)\le 0$ *для всех* $t\in[t_0,\infty)$

5) $K'_{g(\tau)}(t,\tau)\ge 0$ *и* $K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)\le 0$ *для всех* $(t,\tau)\in G=\{(t,\tau):t_0\le\tau\le t<\infty\}$

6) $f(t)\in L^2{}_g[t_0,\infty)$, *такое что* $\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[1+|b(s)|^2\right]|f(s)|^2dg(s)<\infty.$

Тогда для решения $x(t)$ линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка **(1)** $x(t,)x'(t)$ принадлежит к пространству $L_g{}^2[t_0,\infty)$ и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)+\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2dg(s)\le\frac{1}{\beta-\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[1+|b(s)|^2\right]|f(s)|^2dg(s)+\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g(t_0)\right\}$$

Доказательство. Применяя метод преобразования уравнений рассмотренных в работе [1] и умножая уравнения **(1)** на $x'(t)+b(t)x(t)$ и затем, интегрируя от t_0 до t получаем:

$$\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2 dg(s)+\int_{t_0}^{t}[a(s)+b(s)]x(s)x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}a(s)b(s)x^2(s)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)[x'(\tau)+b(\tau)x(\tau)][x'(s)+b(s)x(s)]dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}f(s)[x'(s)+b(s)x(s)]dg(s) \qquad (3)$$

Для вычисления второго интеграла в левой части соотношения (3), применяем метод интегрирования по частям и получим:

$$\int_{t_0}^{t}[a(s)+b(s)]x(s)x'(s)dg(s)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[a(s)+b(s)]g'(s)\left[x^2(s)\right]'_{g(s)}dg(s)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u(s)=[a(s)+b(s)]g'(s) \\ du(s)=\{[a(s)+b(s)]g'(s)\}'_{g(s)}dg(s) \\ dv(s)=\left[x^2(s)\right]'_{g(s)}dg(s) \\ v(s)=x^2(s) \end{array}\right|=\frac{1}{2}[a(s)+b(s)]g'(s)x^2(s)\Big|_{s=t_0}^{s=t}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}x^2(s)\{[a(s)+b(s)]g'(s)\}'_{g(s)}dg(s)=\frac{1}{2}[a(t)+b(t)]g'(t)x^2(t)-$$

$$-\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g'(t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}x^2(s)\{[a(s)+b(s)]g'(s)\}'_{g(s)}dg(s)$$

Подставляя полученные значение в соотношения (3), вычесляем значение суммы трех первых интегралов

$$\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2 dg(s)+\int_{t_0}^{t}[a(s)+b(s)]x(s)x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}a(s)b(s)x^2(s)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2 dg(s)+\frac{1}{2}[a(t)+b(t)]g'(t)x^2(t)-\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g'(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[a(s)b(s)-\frac{1}{2}\{[a(s)+b(s)]g'(s)\}'_{g(s)}\right]|x(s)|^2 dg(s)$$

Подставляя последнее значения в соотношение (3) получим

$$\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2 dg(s)+\frac{1}{2}[a(t)+b(t)]g'(t)x^2(t)+\int_{t_0}^{t}\left[a(s)b(s)-\frac{1}{2}\{[a(s)+b(s)]g'(s)\}'_{g(s)}\right]|x(s)|^2 dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)[x'(\tau)+b(\tau)x(\tau)][x'(s)+b(s)x(s)]dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}f(s)[x'(s)+b(s)x(s)]dg(s)+$$

$$+\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g'(t_0) \qquad (4)$$

Для вычисления двойного интеграла в последнем соотношении (4), применяем следующие равенства, которые рассмотрены в работе $[8]$ для операторных уравнений Вольтерра:

1. $\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)v(s)\right]=K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)v(s)+K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)v(s), \qquad (s,\tau)\in G$

Из последнего тождество следует, что

$$K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)v(s)=\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)v(s)\right]-K'_{g(\tau)}(x,s)z(s,\tau)v(s) \qquad (5)$$

где
$$z(s,\tau)=\int_{\tau}^{s}v(t)dg(t)=\int_{\tau}^{s}\left[x'(t)+b(t)x(t)\right]dg(t). \qquad (6)$$

Из теоремы 1 следует

$$z'_{g(\tau)}(s,\tau)=-\left[x'(\tau)+b(\tau)x(\tau)\right], \qquad (7)$$

$$z'_{g(s)}(s,\tau)=x'(s)+b(s)x(s). \qquad (8)$$

2. $\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)z(s,\tau)\right]=K'_{g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)+2K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau), \qquad (s,\tau)\in G$

Из последнего тождество следует, что

$$K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z^2(s,\tau)\right]-\frac{1}{2}\left[K'_{g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)\right] \qquad (9)$$

где $K'_{g(\tau)}(s,\tau)-$ производная по возрастающей функции $g(\tau)$ [9] .

3. $\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z(s,\tau)\right]=K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)+2K'_{g(\tau)}(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau), \quad (s,\tau)\in G$

Из последнего тождество следует, что

$$K'_{g(\tau)}(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)\right]-\frac{1}{2}\left[K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)\right] \qquad (10)$$

где $K'_{g(\tau)}(s,\tau)-$ производная по возрастающей функции $g(\tau)$ [9] .

Применяя формулы (5),(6),(7),(8),(9) и (10) и проинтегрировав методом по частям, имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)v(\tau)v(s)dg(\tau)dg(s)=-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)v(s)dg(\tau)dg(s)=-\int_{t_0}^{t}v(s)\left[\int_{t_0}^{t}K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)dg(\tau)\right]dg(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}z'_{g(s)}(s,\tau)\{K(s,\tau)z(s,\tau)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=s}-\int_{t_0}^{s}z(s,\tau)K'_{g(\tau)}(s,\tau)dg(\tau)\}dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}z'_{g(s)}(s,t_0)K(s,t_0)z(s,t_0)dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[K(s,t_0)z(s,t_0)z(s,t_0)]dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0)z(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{d}{dg(s)}[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)]dg(\tau)dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)]dg(s)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\int_{\tau}^{t}\frac{d}{dg(s)}[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)]dg(s))dg(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)z^2(t,\tau)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)$$

Отсюда для последнего двойного интеграла имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)\,v(\tau)v(s)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)z^2(t,\tau)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s) \qquad (11)$$

Подставляя полученные значения в соотношения (3) имеем

$$\int_{t_0}^{t}[x'(s)]^2dg(s)+\frac{1}{2}[a(t)+b(t)]g'(t)x^2(t)+\int_{t_0}^{t}\left[a(s)b(s)-\frac{1}{2}\{[a(s)+b(s)]g'(s)\}'_{g(s)}\right]|x(s)|^2dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)z^2(t,\tau)dg(\tau)- \qquad (12)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}f(s)[x'(s)+b(s)x(s)]dg(s)+\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g'(t_0)$$

Для вычисления интеграла в правой части соотношения (4) производим следующие преооброзования:

$$\int_{t_0}^{t}f(s)[x'(s)+b(s)x(s)]dg(s)=\int_{t_0}^{t}f(s)x'(s)dg(s)+\int_{t_0}^{t}f(s)b(s)x(s)dg(s)$$

Отсюда применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов, получим

$$\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|f(s)|\sqrt{\varepsilon}|x'(s)|dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|f(s)|^2dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|f(s)||b(s)|\sqrt{\varepsilon}|x(s)|dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|f(s)|^2|b(s)|^2dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2dg(s)$$

В силу условий теоремы 1), 2), 3), 4), 5),6) и применяя последние неравенства из (12) соотношения имеем

$$(1-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)+(\alpha-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[1+|b(s)|^2\right]f(s)|^2dg(s)+\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g'(t_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}|x'(s)|^2dg(s)+\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2dg(s)\le\frac{1}{\beta-\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[1+|b(s)|^2\right]f(s)|^2dg(s)+\frac{c^2}{2}[a(t_0)+b(t_0)]g(t_0)\right\}$$

где $\beta = \min\{1, \alpha\}$, $0 < \varepsilon < \beta$. Теорема 2 доказана.

Пример. *Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнения первого порядка типа Вольтерра-Стильтьеса (1) при*

$$t_0 = 2,\ \ g(t) = \sqrt{t},\ a(t) = \sqrt{t} + 1,\ b(t) = \sqrt{t} - 1 \ \ и \ \ K(t,s) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1};$$

т.е. следующее линейное интегро-дифферниальное уравнения первого порядка типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x'(t) + \left(\sqrt{t}+1\right)x(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}+1}\left[x'(\tau) + \left(\sqrt{\tau}-1\right)x(\tau)\right]dg(\tau) = f(t), \ \ t \ge 0 \qquad (1)$$

$$x(2) = c, \qquad (2)$$

Проверим выполнение условий теоремы 2:

$$g(t) = \sqrt{t} \ \ ,\ g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

$$a(t)b(t) - \frac{1}{2}\left[(a(t)+b(t))g'(t)\right]'_{g(t)} = \left(\sqrt{t}+1\right)\left(\sqrt{t}-1\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{t}+1+\sqrt{t}-1\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]'_{g(t)} = t - 1$$

1) $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \ge 0$ *и* $a(t) + b(t) = 2\sqrt{t} \ge 0$ *при всех* $t \in [2, \infty)$;

2) $a(t)b(t) - \dfrac{1}{2}\left[(a(t)+b(t))g'(t)\right]'_{g(t)} = t - 1 \ge 1 > 0, \ \forall t \in [2, \infty)$;

$$K(t,2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}+1} \ge 0, \qquad K'_{g(t)}(t,1) = -\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \le 0,$$

$$K'_{g(s)}(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t}+1} \ge 0, \qquad K''_{g(t)g(s)}(t,s) = -\frac{1}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \le 0.$$

Из этого следует что, выполняется все условие теоремы 2.

итература

[1]. Искандаров С. Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1978. –№ 3. – С.3О-33.

[2]. Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро- дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе:Илим, 1980. –Вып.13. – С.185-192.

[3]. Искандаров С. К вопросу о принадлежности пространству $L^2[t_0, \infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра // Там же. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 193-198.

[4]. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68–103.

[5]. Винокуров В.Р. Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра //Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, №10. – С. 1732-1744.

[6]. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений //Мат. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – С.103-107.

[7]. Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтерра //Мат. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. – С.63-71.

[8]. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 13–18.

[9]. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы / Кыргызско-Турецкий ун-т «Манас».– Бишкек, 2001. – С. 18-64.

Рецензент: к.ф-м.н. Сулайманов Б.Э.