Каденова З.А.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Z.A. Kadenova

STABILITY OF SOLUTIONS OF THE SYSTEMS LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

УДК 517.968

В настоящей статье доказана теорема о оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

In the present article the theorem about an assessment of stability of solutions of systems of the linear integrated equations of the first sort with two independent variables in unlimited areas is proved.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)dx + \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dy =$$

$$= f(t,x),(t,x) \in G, \quad G = \{(t,x) \in R^2, \quad t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le b\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y),\ t_0 \le t < \infty,\ a \le y \le x \le b; \\ B(t,x,y),\ t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le y \le b, \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$ - известные $n \times n$ -мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t,x,y) : t_0 \le t < \infty,\ a \le y \le x \le b\},$$
$$G_2 = \{(t,x,y) : t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le y \le b\},$$
$$G_3 = \{(t,x,s) : t_0 \le s \le t < \infty,\ a \le x \le b\},\ G^2 = G \times G,$$

$f(t,x)$-известная, $u(t,x)$ -неизвестная n -мерные вектор-функции.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1,2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Рассмотрена единственность, и устойчивость решений для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными рассмотрена в [3]. В данной работе получены оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях в классе $L_2(G)$.

Введем следующие обозначения:

1) Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим М, < . , . > - скалярное произведение в R^n,

$\|A\|, \|u\|$ - нормы соответственно $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ - мерной матрицы $A=(a_{ij})\in M$ и n - мерного вектора u, т.е. для любых $u=(u_1,u_2,...,u_n),\ \vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)\in R^n$

$$\langle u,\vartheta\rangle = u_1\vartheta_1+u_2\vartheta_2+...+u_n\vartheta_n,$$

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle},\quad \|A\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2\right)^{1/2};$$

2) $L_{2,n}(G)$ - пространство n – мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_{2,n}(G)$ - т.е. для любого $u(t,x)\in L_{2,n}(G)$

$$\|u(t,x)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\|u(t,x)\|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}};$$

3) $L_2\left((G^2)\ ;M\right)$ - пространство $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ - мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_2\left((G^2);M\right)$ - т.е. для любого $A(t,x,s,y)\in L_2\left((G^2)\ ;M\right)$

$$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\|A(t,x,s,y)\|^2dydxdsdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что ядро $\|C(t,x,s,y)\|\in L_2(G^2)$ и $C(t,x,s,y)=C^*(s,y,t,x),\ (t,x,s,y)\in G^2$, где C^* - сопряженная матрица к матрице C . Тогда матричное ядро $C(t,x,s,y)$ разлагается в ряд в смысле сходимости в норме пространстве $L_{2,n}(G^2)$:

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}(t,x)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_n^{(i)}(t,x)\end{pmatrix}\left(\varphi_1^{(i)}(s,y),...,\varphi_n^{(i)}(s,y)\right),\ l\le m\le\infty, \tag{3}$$

где $\left\{\left(\varphi^{(i)}(t,x)\right)=\left(\varphi_\nu^{(i)}(t,x)\right)\right\}$ - ортонормированная последовательность собственных вектор - функций из $L_{2,n}(G)$, $\{\lambda_i\}$ - последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$

расположены в порядке убывания их модулей т.е.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots .$$

Обозначим

$$P(s, y, z) = A(s, y, z) + B^*(s, z, y), \quad (s, y, z) \in G_1. \tag{4}$$

где $B^*(s, z, y) -$ сопряженная матрица и матрице $B(s, z, y)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $P^*(s, y, z) = P(s, y, z), (s, y, z) \in G_1.$

2) Матрицы $P(s, b, a), \ \lim\limits_{t\to\infty} H(t, y, t_0), \ P'_z(s, b, z), \ \lim\limits_{t\to\infty} H'_\tau(t, y, \tau)$ - неотрицательны соответственно при всех значениях $s \in [t_0, \infty), \ y \in [a, b], \ (s, z), \ (\tau, y) \in G,$

$$\|P(s,b,a)\| \in C[t_0, \infty), \ \left\|\lim_{t\to\infty} H(t, y, t_0)\right\| \in C[a,b], \ \|P'_z(s,b,z)\| \in C(G), \ \left\|\lim_{t\to\infty} H'_\tau(t, y, \tau)\right\| \in C(G);$$

3)Матрицы $P'_y(s, y, a), \ H'_s(s, y, t_0), \ P''_{zy}(s, y, z), \ H''_{\tau s}(s, y, \tau)$ - неположительны при всех значениях соответственно $(s, y) \in G, \ (s, y, z) \in G_1, \ (s, y, \tau) \in G_3$,

$$\|P'_y(s, y, a)\| \in C(G), \ \|H'_s(s, y, t_0)\| \in C(G), \ \|P''_{zy}(s, y, z)\| \in C(G_1), \ \|H''_{\tau s}(s, y, \tau)\| \in C(G_3);$$

4) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s, y) \in G$ матрица $P'_y(s, y, a)$ - отрицательны;

б) при почти всех $(s, z) \in G$ матрица $P'_z(s, b, z)$ - положительны;

в) при почти всех $(s, y) \in G$ матрица $H'_s(s, y, t_0)$ - отрицательны;

г) при почти всех $(\tau, y) \in G$ матрица $\lim\limits_{t\to\infty} H'_\tau(\infty, y, \tau)$ - положительны

и для любого

$$v(t,x) \in L_{2,n}(G), \ \int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)ds \in L_{2,n}(G),$$

где $C[t_0,\infty), C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$-пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,\infty), \ G, G_1$ и G_3;

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}(t,x)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_n^{(i)}(t,x)\end{pmatrix}\left(\varphi_n^{(i)}(s,y),\dots,\varphi_n^{(i)}(s,y)\right) \qquad (5)$$

где $\left\{\left(\varphi^{(i)}(t,x)\right)=\left(\varphi_\nu^{(i)}(t,x)\right)\right\}$ - ортонормированная последовательность собственных вектор - функций из $L_2(G^2)$, $\{\lambda_i\}$ - последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей

$$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\dots.$$

Будем считать, что все собственные значения λ_ν, матричного ядра $C(t,x,s,y)$ положительны.

В силу вполне непрерывности и самосопряженности оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$ ортонормированная последовательность собственных вектор – функций $\left\{\left(\varphi^{\nu}(t,x)\right)=\left(\varphi_i^{(\nu)}(t,x)\right)\right\}$ - полна в $L_{2,n}(G)$. Очевидно, что если $u(t,x)\in L_{2,n}(G)$, то

где $\|u(t,x)\|_{L_2}^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2,$

$$u^{(\nu)}=\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle u(t,x),\varphi^{(\nu)}(t,x)\right\rangle dtdx,\quad (\nu=1,2,\dots).$$

Семейство множеств корректностей M_α выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t,x)\in L_{2,n}(G):\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c>0,\quad 0<\alpha<\infty,$

$$u^{(\nu)}=\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle u(t,x),\varphi^{(\nu)}(t,x)\right\rangle dxdt,\ (\nu=1,2,\dots).$$

Обе части системы (1) скалярно умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G. Далее, используя формулы Дирихле и учитывая (3), имеем

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\int_a^b u(s,\nu)d\nu,\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_y'(s,y,a)\int_a^y u(s,\nu)d\nu,\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_z'(s,b,z)\int_z^b u(s,\nu)d\nu,\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y\left\langle P_{zy}''(s,y,z)\int_z^y u(s,\nu)d\nu,\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle \lim_{t\to\infty}H(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle H_s'(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi\right\rangle dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \lim_{t\to\infty}H_\tau'(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi,\int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\left\langle H_{\tau s}''(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi,\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dsdy+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2=\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\langle f(t,x),u(t,x)\rangle dtdx.$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2\le\|f(t,x)\|\|u(t,x)\|. \tag{6}$$

Если $f(t,x)=0\ \forall(t,x)\in G,$ то из (6) имеем $u(t,x)=0\ \forall(t,x)\in G.$

С другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2\le\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{7}$$

Пусть $u(t,x) \in M_\alpha$. Тогда, учитывая (6), из (7) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| u^{(\nu)} \right|^2 \leq \left(\| f(t,x) \| \| u(t,x) \| \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} c^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (8)$$

Из (8) получим следующую оценку устойчивости:

$$\| u(t,x) \|_{L_2} \leq C^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t,x) \|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}. \quad (9)$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия 1)-2), $K(M_\alpha) \subset L_{2,n}(G)$- образ M_α при отображении К. Тогда на решение системы (1) единственно $L_{2,n}(G)$ и множестве $K(M_\alpha)$ существует равномерно непрерывный оператор $К^{-1}$, обратный кК, т.е. справедлива оценка (9).

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. HalukChelik, Kadenova Z. A.Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.